Aufgabe 27. Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung

$$n = \sum a_i 10^i$$

ist n durch 11 teilbar genau dann, wenn

$$\sum a_i (-1)^i$$

durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 28. Eine österreichische IBAN (*international bank account number*) hat immer zwanzig Stellen und sieht folgendermaßen aus:

$$ATpp\ bbbb\ bkkk\ kkkk\ kkkk$$

wobei *bbbbb* die fünfstellige Bankleitzahl, *kkk kkkk kkkk* die (um Nullen ergänzte) herkömmliche Kontonummer ist und *pp* ein Prüfcode zwischen 02 und 98, der so bestimmt wird, dass

$$bbbbbkkkkkkkkkkk1029pp \equiv 1 \mod 97.$$

(1029 entsteht aus AT durch addieren von 9 zur Stelle im Alphabet: also $A \to 1+9 = 10$, $B \to 2+9 = 11, \dots, Z \to 26+9 = 35$).
Bestimme die IBAN der folgenden Kontonummer[2]: BLZ: 12345, KtoNr: 7654321

Aufgabe 29. Die maschinelle Verifikation einer IBAN erfordert Rechnungen mit 30bit INT. Auf eingeschränkter Hardware, die diese Operationen nicht beherrscht, kann die Überprüfung schrittweise wie folgt durchgeführt werden:

1. Zerlege die Zahl $N = b_1b_2b_3b_4b_5k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_9k_{10}k_{11}1029p_1p_2$ in drei Teile $b_1b_2b_3b_4b_5k_1k_2k_3k_4$, $k_5k_6k_7k_8k_9k_{10}k_{11}$, $1029p_1p_2$ (9+7+6 Ziffern).
2. Nehme die ersten 9 Stellen $N_1 = b_1b_2b_3b_4b_5k_1k_2k_3k_4$.
3. Berechne den Rest $r_1r_2 = N_1 \mod 97$.
4. Füge diese beiden Ziffern zu den nächsten 7 Stellen hinzu und bilde die Zahl $N_2 = r_1r_2k_5k_6k_7k_8k_9k_{10}k_{11}$
5. Berechne den Rest $r_3r_4 = N_2 \mod 97$.
6. Füge diese beiden Ziffern zu den verbleibenden Stellen hinzu und bilde die Zahl $N_3 = r_3r_41029p_1p_2$.
7. Der Rest $N_3 \mod 97$ muß 1 ergeben.

(a) Überprüfe die IBAN aus Aufgabe 28 mit dieser Methode.
(b) Zeige, daß der Algorithmus wirklich das gleiche Ergebnis liefert wie die Division der kompletten IBAN modulo 97.

Aufgabe 30. Zeige, daß eine IBAN ungültig wird, wenn
(a) eine Ziffer falsch eingegeben wird.
(b) zwei benachbarte Ziffern vertauscht werden.

Aufgabe 31. Finde, wenn möglich, die folgenden multiplikativen Inversen:

(a) $[5]_{17}^{-1}$	(b) $[14]_{93}^{-1}$
(c) $[51]_{85}^{-1}$	(d) $[15]_{93}^{-1}$

Aufgabe 32. Löse, wenn möglich, das Gleichungssystem

$$x + 2y = 4$$
$$4x + 3y = 3$$

(a) in $\mathbb{Z}_5$ (b) in $\mathbb{Z}_7$

[2]Bitte kein Geld überweisen, es ist nicht das Konto des Vortragenden und verbessert nicht die Note.

Aufgabe 33. Finde alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$, der folgenden Gleichungen.

(a) $4x + 3 \equiv 1 \mod 7$
(b) $4x + 3 \equiv 2 \mod 9$
(c) $6x \equiv 3 \mod 9$
(d) $6x \equiv 4 \mod 9$

Aufgabe 34. Löse das folgende Kongruenzgleichungssystem mithilfe des chinesischen Restsatzes.

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 1 \mod 11\\
x &\equiv 6 \mod 18\\
x &\equiv 5 \mod 7
\end{aligned}
$$