

Aufgabe 9. Beweise durch vollständige Induktion die folgende Summationsformel für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 10. Zu zwei Mengen M und N betrachten wir die Aussagen

A: Jedes Element von M liegt auch in N .

B: Kein Element liegt in beiden Mengen zugleich.

C: Nicht alle Elemente von N liegen auch in M .

- (a) Formuliere diese Aussagen mit Quantoren und Junktoren und forme sie solange um, bis sämtliche Quantoren ganz links stehen.
- (b) Gib für jede einzelne Aussage passende Mengen M und N an, die sie erfüllen.
- (c) Gibt es Mengen M und N , die alle drei Aussagen erfüllen?

Aufgabe 11. Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig?

Wahre Aussagen beweisen mit Venndiagramm oder logischen Argumenten, falsche Aussagen durch Gegenbeispiel nachweisen.

- (a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (b) $\emptyset \in \emptyset$
- (c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (e) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
- (f) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- (g) $(A \in B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \in C)$
- (h) $(A \notin B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \notin C)$
- (i) $(A \in B) \wedge (B \in C) \rightarrow (A \in C)$

Aufgabe 12. Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig?

(Gegenbeispiel oder Beweis mit (i) Venndiagramm und (ii) logischen Argumenten)

- (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ wobei $A, B \subseteq U$ ("Universum") und $A^c := U \setminus A$.
- (b) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- (c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- (d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$