

Aufgabe 19. Zeige, daß durch

$$(x, y) \sim (u, v) : \Longleftrightarrow x - y = u - v$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird. Bestimme die Faktormenge $\mathbb{R}^2/\sim$ und interpretiere sie geometrisch.

Aufgabe 20. Seien X und Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Zeige, daß durch

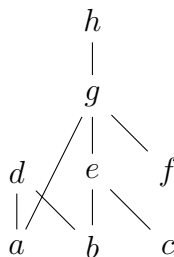
$$x \sim y : \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird und daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : X/\sim &\rightarrow Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv ist.

Aufgabe 21. Wir betrachten die Menge $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ mit der durch das folgende Hasse-Diagramm gegebenen Ordnungsrelation.



- Bestimme, wenn existent, alle minimalen und maximalen Elemente sowie Maximum und Minimum.
- Zähle alle *Ketten*² auf.
- Zähle alle *Antiketten*³ auf.
- Bestimme, wenn möglich, die folgenden *Infima*⁴ und *Suprema*⁵:

$$a \vee c, a \wedge c, c \vee f, d \vee g, d \wedge g, d \wedge e, d \wedge f, d \vee f$$

²Eine **Kette** ist eine totalgeordnete Teilmenge.

³Eine **Antikette** ist eine Teilmenge mit paarweise unvergleichbaren Elementen.

⁴Das **Infimum** $x \wedge y$ von zwei Elementen ist die größte untere Schranke.

⁵Das **Supremum** $x \vee y$ von zwei Elementen ist die kleinste obere Schranke.