Aufgabe 36. Sei $\mathcal{M}_n$ die Menge aller Gitterpfade $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ der Länge n, die die Bedingungen

$$y_0 = y_n = 0, \qquad y_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n \qquad |y_k - y_{k-1}| \leq 1, k = 1, 2, \dots, n;$$

d.h., die Höhendifferenz zwischen benachbarten Punkten ist -1, 0, oder 1. Zeige, daß die Anzahl $M_n = |\mathcal{M}_n|$ dieser Pfade die Rekursionen

(a) $M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}$

(b) $M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$

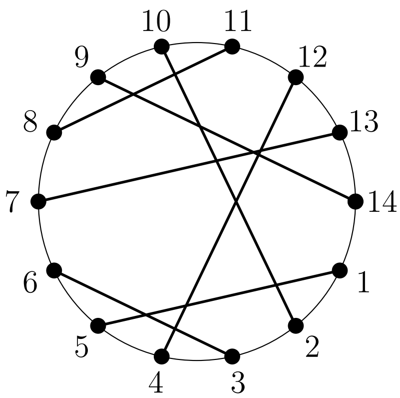
erfüllt, wobei C_n die aus der Vorlesung bekannte Folge der Catalanzahlen bezeichnet.

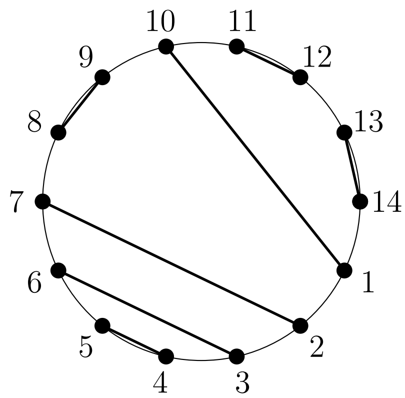
Aufgabe 37. (a) Wir betrachten $2n$ Punkte auf einem Kreis und verbinden sie zu Paaren wie in der untenstehenden linken Abbildung. Wieviele solche Paarungen gibt es?

(b) Zeige, daß die Anzahl der Paarungen, die sich nicht gegenseitig überkreuzen (rechte Abbildung), durch die Catalanzahlen C_n gegeben ist.

(c) Zeige, daß die Anzahl der unvollständigen Paarungen (d.h., Partitionen in Klassen mit höchstens 2 Elementen) von n Punkten, die sich nicht gegenseitig kreuzen, durch die Zahl M_n aus der vorhergehenden Übung gegeben ist.

Hinweis: es kann hilfreich sein, den Kreis an einer Stelle aufzuschneiden und auszurollen.





Aufgabe 38. Zeige, daß es unter 8 natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_8 \in \{1, 2, \dots, 15\}$ stets drei Paare mit der gleichen Differenz gibt.

Aufgabe 39. Zeige: Es gibt eine ganze Zahl der Form $11111\dots1$, die durch 2019 teilbar ist. Gib eine obere Schranke für diese Zahl an.

Aufgabe 40. Zeige (z.B. durch Induktion), daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $a \in \mathbb{N}$ die Zahl $a^{2n+1} - a$ durch 6 teilbar ist.