Aufgabe 41. Berechne mit dem euklidischen Algorithmus $\mathrm{ggT}(m,n)$ sowie Zahlen a und b, sodaß $\mathrm{ggT}(m,n) = am + bn$ für die folgenden Zahlenpaare:

$$(144, 89) \qquad (7^{15}+1, 7^{12}-1) \qquad (4711, 2019) \qquad (332211, 112233)$$

Aufgabe 42. Zeige (ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung), daß für beliebige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n) = m \cdot n.$$

Aufgabe 43. Bestimme

$$\min\{126a + 266b + 315c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$$

sowie Koeffizienten a, b, c, für die das Minimum angenommen wird.

Aufgabe 44. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ Zeige (ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung): Wenn $a|bc$ und $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$, dann gilt $a|c$.

Aufgabe 45. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und $d = \mathrm{ggT}(a,b)$. Wir betrachten die Gleichung

$$ax + by = c$$

Zeige:

(a) Die Gleichung besitzt eine ganzzahlige Lösung genau dann, wenn $d|c$.

(b) Sei (x_0, y_0) eine Lösung, dann haben alle anderen Lösungen die Form $(x_0 + k\frac{b}{d}, y_0 - k\frac{a}{d})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Aufgabe 44.