

Aufgabe 46. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichungen

(a) $15x \equiv 10 \pmod{25}$

(b) $15x \equiv 9 \pmod{25}$

Aufgabe 47. Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Aufgabe 48. Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Dezimalentwicklung $n = \sum a_i 10^i$ gilt

$$11 \mid n \iff 11 \mid \sum a_i (-1)^i.$$

Aufgabe 49. (a) Zeige:

$$a \equiv b \pmod{m_1} \wedge a \equiv b \pmod{m_2} \iff a \equiv b \pmod{m}$$

wobei $m = \text{kgV}(m_1, m_2)$.

(b) Folgere daraus, daß die Lösung des Kongruenzgleichungssystems

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv c_n \pmod{m_n}$$

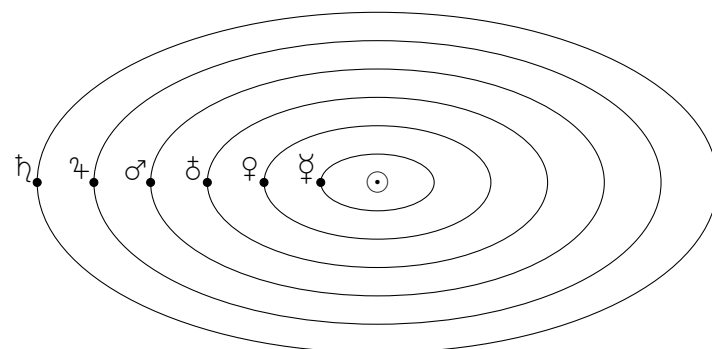
eindeutig ist modulo $m = m_1 m_2 \cdots m_n$, wenn $\text{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für $i \neq j$.

Aufgabe 50. Berechne $2^{31} \pmod{900}$.

Hinweis: Rechne modulo der Primfaktoren ($900 = 4 \cdot 9 \cdot 25$) und ermittle das Endresultat mit dem chinesischen Restsatz.

Zusatzaufgabe. Die folgende Tabelle zeigt die Umlaufzeiten (U) der frei sichtbaren Planeten, sowie die Zeit in Tagen (D), die am 7.1.2020 jeweils vergangen sind, seit jeder einzelne das letzte Mal den Punkt der Wintersonnenwende durchlaufen ist.

	U	D
Merkur	88	49
Venus	225	14
Erde	365	24
Mars	687	272
Jupiter	4333	2141
Saturn	10759	3275



Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Sonnensystem fix ist und sich der Punkt der Wintersonnenwende nicht ändert. Wieviele Tage sind seit dem letzten *Shangyuan* vergangen, d.h., seit dem Zeitpunkt, als alle Planeten zur Wintersonnenwende am 21. Dezember in einer Reihe standen wie in der Skizze?

Hinweis: Mit dem Computer berechnen! Um den chinesischen Restsatz anwenden zu können, vorher Aufgabe 49 anwenden.