Aufgabe 1. Untersuche, ob die folgenden Relationen $R \subseteq X \times X$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch, konnex oder asymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenz-, welche Ordnungsrelationen? Bestimme ggf. die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem.

(i) $X = \mathbb{N}$, Relation: $mRn \iff 2|(m \cdot n)$.
(ii) $X = \mathbb{R}^2$, Relation: $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_2 \leqslant y_2$.
(iii) $X = \mathbb{R}^2$, Relation: $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2$.
(iv) A eine Menge, $X = \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\}$, Relation: $xRy \iff x \cap y \neq \varnothing$.
(v) X beliebig, Relation: $xRy \iff x \neq y$.

Aufgabe 2. Vervollständige den Beweis von Satz 2.12 aus der Vorlesung: Sei X eine Menge und $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition von X, dann wird durch

$$x \sim y :\iff \exists A \in \mathcal{Z} : x \in A \wedge y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert, sodaß $X/_\sim = \mathcal{Z}$.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge.

(a) Auf X sei eine Familie $(R_i)_{i \in I}$ von Äquivalenzrelationen $R_i \subseteq X \times X$ gegeben. Zeige, daß $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation auf X ist.
(b) Konstruiere ein Beispiel für zwei Äquivalenzrelationen R_1 und R_2 auf einer Menge X, sodaß $R_1 \cup R_2$ keine Äquivalenzrelation ist.
(c) Sei $A \subseteq X \times X$ eine beliebige Teilmenge. Zeige, daß es eine eindeutige minimale Äquivalenzrelation R_0 auf X gibt, sodaß $A \subseteq R_0$, d.h., daß für jede Äquivalenzrelation R mit $A \subseteq R$ auch $R_0 \subseteq R$ gilt.
(d) Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Bestimme die kleinste Äquivalenzrelation, die die Menge $A = \{(1, 3), (1, 4), (2, 7)\}$ enthält, und die Äquivalenzklassen.

Aufgabe 4. Sei M eine Menge von Mengen. Zeige, daß durch

$$A \sim B :\iff |A| = |B|$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Aufgabe 5. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeige, daß durch

$$x \sim y :\iff f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird und daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : X/_\sim &\to Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv ist.