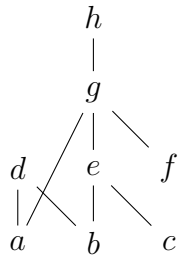
Aufgabe 6. Wir betrachten die Menge $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ mit der durch das folgende Hasse-Diagramm gegebenen Ordnungsrelation.



(a) Bestimme, wenn existent, alle minimalen und maximalen Elemente sowie Maximum und Minimum.
(b) Zähle alle *Ketten*[†] auf.
(c) Zähle alle *Antiketten*[‡] auf.
(d) Bestimme, wenn möglich, die folgenden *Infima*[§] und *Suprema*[¶]:

$$a \vee c, a \wedge c, c \vee f, d \vee g, d \wedge g, d \wedge e, d \wedge f, d \vee f$$

Aufgabe 7. Bestimme das Hasse-Diagramm der teilgeordneten Menge Π_4 aller Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ mit der Ordnungsrelation

$$\mathcal{Z}_1 \leqslant \mathcal{Z}_2 : \Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{Z}_1 \exists B \in \mathcal{Z}_2 : A \subseteq B.$$

Aufgabe 8. Zeige, daß aus jeder Menge von 10 verschiedenen natürlichen Zahlen eine Teilmenge ausgewählt werden kann, deren Summe durch 10 teilbar ist.

Aufgabe 9. Zeige: Aus fünf Punkten in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten (d.h., gegeben sind $P_1, P_2, \ldots, P_5 \in \mathbb{Z}^2$) kann man immer zwei auswählen, sodaß deren Mittelpunkt ebenfalls ganzzahlige Koordinaten hat.

Aufgabe 10. Seien X eine endliche Menge mit $|X| = m$ Elementen und $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Menge mit n Elementen. Zeige: Wenn Zahlen $r_i \in \mathbb{N}$ gegeben sind mit $r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m + n$, dann gibt es für jede Funktion $f : X \to Y$ ein Element $i \in Y$, sodaß $|f^{-1}(i)| \geqslant r_i$.

[†]Eine **Kette** ist eine totalgeordnete Teilmenge.
[‡]Eine **Antikette** ist eine Teilmenge mit paarweise unvergleichbaren Elementen.
[§]Das **Infimum** $x \wedge y$ von zwei Elementen ist die größte untere Schranke.
[¶]Das **Supremum** $x \vee y$ von zwei Elementen ist die kleinste obere Schranke.