

**Aufgabe 23.** Bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$$

jeweils mit den Nebenbedingungen

- (a)  $x_i \geq 0$  für  $1 \leq i \leq 5$ ;
- (b)  $x_i \geq 0$  für  $1 \leq i \leq 4$  und  $x_5 \geq 5$ ;
- (c)  $x_i \geq 0$  für  $1 \leq i \leq 3$ ,  $0 \leq x_4 \leq 4$  und  $0 \leq x_5 \leq 4$ .

**Aufgabe 24.** Sei  $p(n)$  die Anzahl der Partitionen  $\lambda \vdash n$ , d.h., die Anzahl der Zerlegungen  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ . Zeige:

- (a)  $p(2n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ gerade}) = p(n)$
- (b)  $p(n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ ungerade}) = p(n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ verschieden})$

Hinweis: Finde jeweils eine bijektive Funktion zwischen den beiden Mengen von Partitionen.

**Aufgabe 25.** Sei  $\mathcal{M}_n$  die Menge aller Gitterpfade<sup>†</sup>  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  der Länge  $n$ , die die Bedingungen

$$y_0 = y_n = 0, \quad y_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n \quad |y_k - y_{k-1}| \leq 1, k = 1, 2, \dots, n;$$

d.h., die Höhendifferenz zwischen benachbarten Punkten ist  $-1$ ,  $0$ , oder  $1$ .

Zeige, daß die Anzahl  $M_n = |\mathcal{M}_n|$  dieser Pfade

- (a) die Rekursion  $M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}$

- (b) die Identität  $M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$

erfüllt, wobei  $C_n$  die aus der Vorlesung bekannte Folge der Catalanzahlen bezeichnet.

**Aufgabe 26.** Eine Triangulierung eines konvexen  $n$ -Ecks ist eine Partition der Fläche desselben durch sich gegenseitig nicht schneidenden Diagonalen. Zeige, daß die Anzahl  $T_n$  der Triangulierungen des  $n$ -Ecks für  $n \geq 3$  die Rekurrenzrelation

$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$

erfüllt. Dabei ist  $T_2 := 1$ .

<sup>†</sup>Hier sind die  $x$ -Koordinaten weggelassen. In der Notation der Vorlesung entspricht das den Gitterpunkten  $(0, y_0), (1, y_1), \dots, (n, y_n)$  und die erlaubten Schritte sind  $(1, 1), (1, 0), (1, -1)$ .