

Aufgabe 27. Finde für $1 \leq k \leq 4$ jeweils ein Modell, das das k -te Axiom von Peano verletzt und die drei anderen erfüllt.

Aufgabe 28. Berechne mit dem euklidischen Algorithmus $\text{ggT}(m, n)$ sowie Zahlen a und b , sodaß $\text{ggT}(m, n) = am + bn$ für die folgenden Zahlenpaare:

$$(144, 89) \quad (7^{15} + 1, 7^{12} - 1) \quad (4711, 2019) \quad (332211, 112233)$$

Aufgabe 29. Zeige mit dem euklidischen Algorithmus, dass die Zahlen $m = 9k + 4$ und $n = 11k + 5$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ koprim sind und bestimme Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sodaß $am + bn = 1$.

Aufgabe 30. Zeige (ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung), daß für beliebige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{ggT}(m, n) \cdot \text{kgV}(m, n) = m \cdot n.$$

Aufgabe 31. Bestimme

$$\min\{126a + 266b + 315c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$$

sowie Koeffizienten a, b, c , für die das Minimum angenommen wird.

Aufgabe 32.

(a) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ Zeige (ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung): Wenn $a|bc$ und $\text{ggT}(a, b) = 1$, dann gilt $a|c$.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und $d = \text{ggT}(a, b)$. Wir betrachten die Gleichung

$$ax + by = c$$

Zeige: Die Gleichung besitzt eine ganzzahlige Lösung genau dann, wenn $d|c$.

(c) Sei (x_0, y_0) eine Lösung, dann haben alle anderen Lösungen die Form $(x_0 + k\frac{b}{d}, y_0 - k\frac{a}{d})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.