Aufgabe 33. Zeige: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch n eine Primzahl.

Aufgabe 34. Sei $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Eine Zahl heißt *vollkommen*, wenn $\sigma(n) = 2n$. Zeige:
(a) Wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, dann ist $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
(b) Wenn $2^p - 1$ eine Primzahl ist, dann ist $2^{p-1}(2^p - 1)$ eine vollkommene Zahl.
(c) Sei n eine vollkommene Zahl, dann ist $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.

Aufgabe (Fleissaufgabe zu 34).
(a) Zeige, daß es keine ungeraden perfekten Zahlen gibt.
(b) Finde eine ungerade perfekte Zahl.

Aufgabe 35. Zeige: Es gibt eine ganze Zahl der Form $11111\dots1$, die durch 123456789 teilbar ist. Gib eine obere Schranke für diese Zahl an.

Aufgabe 36. Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Dezimalentwicklung $n = \sum a_i 10^i$ gilt

$$11 \mid n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 11 \mid \sum a_i (-1)^i.$$

Aufgabe 37. Zeige, daß $p^2 \equiv 1 \mod 24$ für jede Primzahl $p \geqslant 5$ gilt.

Aufgabe 38. Bestimme, wenn möglich, die folgenden Inversen:

$$[42]_{172}^{-1}, \qquad [43]_{172}^{-1}, \qquad [44]_{172}^{-1},$$