

Aufgabe 39. Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Aufgabe 40. Berechne $2^{31} \pmod{900}$.

Hinweis: Rechne modulo der Primfaktoren ($900 = 4 \cdot 9 \cdot 25$) und ermittle das Endresultat mit dem chinesischen Restsatz.

Aufgabe 41. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $d = \text{ggT}(m, n)$. Zeige, daß das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{m} \\ x &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

genau dann lösbar ist, wenn $a \equiv b \pmod{d}$.

Aufgabe 42. Zeige:

$$a \equiv b \pmod{m_1} \quad \wedge \quad a \equiv b \pmod{m_2} \quad \Longleftrightarrow \quad a \equiv b \pmod{m}$$

wobei $m = \text{kgV}(m_1, m_2)$.

Aufgabe 43. Bestimme, wenn möglich, alle Lösungen der folgenden Kongruenzgleichungssysteme.

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{6} \\ x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv 5 \pmod{15} \end{aligned} \\ (b) & \begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod{6} \\ x &\equiv 2 \pmod{10} \\ x &\equiv 7 \pmod{15} \end{aligned} \end{array}$$

Aufgabe 44. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl mit Primfaktorzerlegung $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Bestimme die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x^2 \equiv 1 \pmod{m}$$

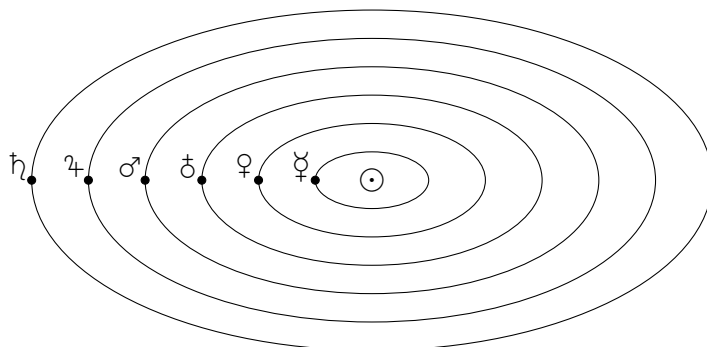
in $\mathbb{Z}_m$.

Hinweis:

Verwende den chinesischen Restsatz und die Tatsache, daß eine ungerade Primzahl p nicht gleichzeitig $x + 1$ und $x - 1$ teilen kann.

Aufgabe (Fleissaufgabe). Die folgende Tabelle zeigt die Umlaufzeiten (U) der frei sichtbaren Planeten, sowie die Zeit in Tagen (D), die am 13.5.2025 jeweils vergangen sind, seit jeder einzelne das letzte Mal den Punkt der Wintersonnenwende durchlaufen ist.

	U	D
Merkur	88	65
Venus	225	166
Erde	365	151
Mars	687	163
Jupiter	4333	4093
Saturn	10759	5227



Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Sonnensystem fix ist und sich der Punkt der Wintersonnenwende nicht ändert. Wieviele Tage sind seit dem letzten *Shangyuan* vergangen, d.h., seit dem Zeitpunkt, als alle Planeten zur Wintersonnenwende am 21. Dezember in einer Reihe standen wie in der Skizze?

Hinweis: Mit dem Computer berechnen! Um den chinesischen Restsatz anwenden zu können, vorher Aufgabe 42 anwenden.