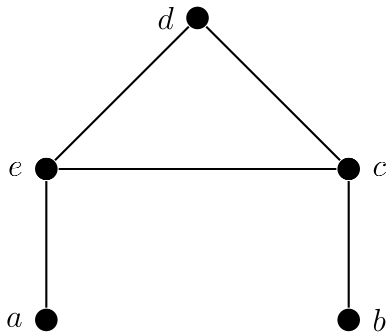
Aufgabe 56. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der *Kantengraph* von G ist der Graph $L(G) = (E, W)$ wobei $[e_1, e_2] \in W \iff e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$. (In Worten: Die Knoten von $L(G)$ sind die Kanten von G und zwei Kanten werden verbunden, wenn sie einen Knoten gemeinsam haben). Zeige: Wenn der Graph G eine Eulersche Tour besitzt, dann auch der Kantengraph. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 57. Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ besteht aus der Knotenmenge $V = A \dot\cup B$ mit $|A| = m$ und $|B| = n$ und der Kantenmenge $E = \{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Charakterisiere alle Paare (m, n), für die $K_{m,n}$ eine Eulertour besitzt.
(b) Charakterisiere alle Paare (m, n), für die $K_{m,n}$ einen Hamiltonkreise besitzt.

Aufgabe 58. Zeige oder widerlege: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

Aufgabe 59. Gegeben sei der folgende Graph.



Bestimme die Adjazenzmatrix und die Anzahl der Wege der Länge 7 vom Knoten a zum Knoten b.

Aufgabe 60. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $L = D - A$, wobei A die Adjazenzmatrix bezeichnet und D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $d_{ii} = \deg v_i$, wobei $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Seien $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ die Eigenwerte von L (mit Vielfachheit gezählt). Zeige:

(a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2\,|E|$
(b) $\lambda_1 = 0$
(c) $\dim\ker L = 1$ genau dann, wenn der Graph zusammenhängend ist.

Hinweis. Zeige und verwende, dass $u^T L u = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(u_i - u_j)^2$, wobei a_{ij} die Einträge der Adjazenzmatrix sind.
Die Tatsache, dass L diagonalisierbar ist, darf ohne Beweis verwendet werden.