**Aufgabe 1.** Untersuche, ob die folgenden Relationen $R \subseteq X \times X$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch, konnex oder asymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenz-, welche Ordnungsrelationen? Bestimme ggf. die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem.

(i) $X = \mathbb{N}$, Relation: $mRn \iff 2|(m \cdot n)$.
(ii) $X = \mathbb{R}^2$, Relation: $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_2 \leqslant y_2$.
(iii) $X = \mathbb{R}^2$, Relation: $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2$.
(iv) $A$ eine Menge, $X = \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\}$, Relation: $xRy \iff x \cap y \neq \varnothing$.
(v) $X$ beliebig, Relation: $xRy \iff x \neq y$.

**Aufgabe 2.** Vervollständige den Beweis von Satz 2.12 aus der Vorlesung: Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition von $X$, dann wird durch

$$x \sim y :\iff \exists A \in \mathcal{Z} : x \in A \wedge y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf $X$ definiert, sodaß $X/_\sim = \mathcal{Z}$.

**Aufgabe 3.** Sei $X$ eine Menge.

(a) Auf $X$ sei eine Familie $(R_i)_{i \in I}$ von Äquivalenzrelationen $R_i \subseteq X \times X$ gegeben. Zeige, daß $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation auf $X$ ist.
(b) Konstruiere ein Beispiel für zwei Äquivalenzrelationen $R_1$ und $R_2$ auf einer Menge $X$, sodaß $R_1 \cup R_2$ keine Äquivalenzrelation ist.
(c) Sei $A \subseteq X \times X$ eine beliebige Teilmenge. Zeige, daß es eine eindeutige minimale Äquivalenzrelation $R_0$ auf $X$ gibt, sodaß $A \subseteq R_0$, d.h., daß für jede Äquivalenzrelation $R$ mit $A \subseteq R$ auch $R_0 \subseteq R$ gilt.
(d) Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Bestimme die kleinste Äquivalenzrelation, die die Menge $A = \{(1, 3), (1, 4), (2, 7)\}$ enthält, und die Äquivalenzklassen.

**Aufgabe 4.** Sei $M$ eine Menge von Mengen. Zeige, daß durch

$$A \sim B :\iff |A| = |B|$$

eine Äquivalenzrelation auf $M$ definiert wird.

**Aufgabe 5.** Seien $X$ und $Y$ Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeige, daß durch

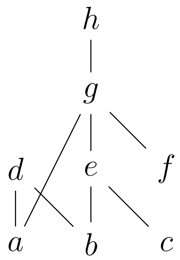
$$x \sim y :\iff f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf $X$ definiert wird und daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : X/_\sim &\to Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv ist.

**Aufgabe 6.** Wir betrachten die Menge $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ mit der durch das folgende Hasse-Diagramm gegebenen Ordnungsrelation.




(a) Bestimme, wenn existent, alle minimalen und maximalen Elemente sowie Maximum und Minimum.
(b) Zähle alle *Ketten*[†] auf.
(c) Zähle alle *Antiketten*[‡] auf.
(d) Bestimme, wenn möglich, die folgenden *Infima*[§] und *Suprema*[¶]:

$$a \vee c, a \wedge c, c \vee f, d \vee g, d \wedge g, d \wedge e, d \wedge f, d \vee f$$

**Aufgabe 7.** Bestimme das Hasse-Diagramm der teilgeordneten Menge $\Pi_4$ aller Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ mit der Ordnungsrelation

$$\mathcal{Z}_1 \leqslant \mathcal{Z}_2 :\iff \quad \forall A \in \mathcal{Z}_1 \exists B \in \mathcal{Z}_2 : A \subseteq B.$$

**Aufgabe 8.** Zeige, daß aus jeder Menge von 10 verschiedenen natürlichen Zahlen eine Teilmenge ausgewählt werden kann, deren Summe durch 10 teilbar ist.

**Aufgabe 9.** Zeige: Aus fünf Punkten in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten (d.h., gegeben sind $P_1, P_2, \ldots, P_5 \in \mathbb{Z}^2$) kann man immer zwei auswählen, sodaß deren Mittelpunkt ebenfalls ganzzahlige Koordinaten hat.

**Aufgabe 10.** Seien $X$ eine endliche Menge mit $|X| = m$ Elementen und $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Menge mit $n$ Elementen. Zeige: Wenn Zahlen $r_i \in \mathbb{N}$ gegeben sind mit $r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m + n$, dann gibt es für jede Funktion $f : X \to Y$ ein Element $i \in Y$, sodaß $|f^{-1}(i)| \geqslant r_i$.

[†] Eine **Kette** ist eine totalgeordnete Teilmenge.
[‡] Eine **Antikette** ist eine Teilmenge mit paarweise unvergleichbaren Elementen.
[§] Das **Infimum** $x \wedge y$ von zwei Elementen ist die größte untere Schranke.
[¶] Das **Supremum** $x \vee y$ von zwei Elementen ist die kleinste obere Schranke.

**Aufgabe 11.** Beweise durch kombinatorische Argumente:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

**Aufgabe 12.** (a) Wieviele verschiedene 7-stellige Telephonnummern können aus den Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 gebildet werden?

(b) Wieviele dieser Nummern beginnen mit 1? mit 2? mit 3? mit 4?

(c) Wir schreiben die gefundenen Telephonnummern der Größe nach in eine Liste. An welcher Stelle steht die kleinste Zahl, die mit 3 beginnt?

(d) wie (c), welche Telephonnummer steht an der 240. Position?

(e) Wieviele verschiedene 7-stellige Telephonnummern können aus den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 gebildet werden, sodaß benachbarte Ziffern verschieden sind?

**Aufgabe 13.** Wieviele natürliche Zahlen $n \leqslant 10^6$ können weder als Quadrat $n = k^2$, noch als Kubikzahl $n = k^3$, noch als Potenz $n = k^5$ für ein $k \in \mathbb{N}$ dargestellt werden?

**Aufgabe 14.** Ein Palindrom ist ein Wort, das von vorne und von hinten gelesen den selben Ausdruck ergibt; z.B. OTTO, RENNER, RELIEFPFEILER, AXXUXXA, etc. Wieviele 9-buchstabige Palindrome gibt es über dem lateinischen Alphabet?

**Aufgabe 15.** Bei wievielen n-ziffrigen Dezimalzahlen sind die Ziffern von links nach rechts aufsteigend sortiert? (Die erste Ziffer darf keine 0 sein; zwei auf einander folgende Ziffern dürfen gleich sein). Wie lautet die Antwort, wenn die Ziffern paarweise verschieden sein müssen?

**Aufgabe 16.** Ein **Fixpunkt** einer Abbildung $f : X \to X$ ist ein Element $x \in X$, sodaß $f(x) = x$. Bestimme die Anzahl der bijektiven Abbildungen $f : X \to X$, die keinen einzigen Fixpunkt besitzen, wenn $|X| = n$.
*Hinweis*: Inklusion-Exklusion.

**Aufgabe 17.** (a) Zeige, daß

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

(b) Sei $n = pk$. Bestimme die Anzahl der Mengenpartitionen von $\{1, 2, \dots, n\}$, sodaß alle Klassen $k$ Elemente enthalten.

**Aufgabe 18.** Sei $D_n$ die Anzahl der Permutationen ohne Fixpunkt aus Aufgabe 16.

(i) Zeige, dass diese Zahlen die Rekursion
$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$
erfüllen.

(ii) Folgere daraus die Rekursion
$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

(iii) Zeige mit kombinatorischen Argumenten, dass
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

**Aufgabe 19.** Seien $X$ und $Y$ Mengen mit $|X| = n$ und $|Y| = n-3$. Zeige, daß die Anzahl aller surjektiven Funktionen von $X$ nach $Y$ gegeben ist durch
$$\frac{n!(n-2)(n-3)^2}{48}$$

**Aufgabe 20.** Zeige mit kombinatorischen Argumenten, daß
$$m^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} m^{\underline{k}}$$

**Aufgabe 21.** Bestimme die Anzahl der Permutationen des Wortes ABRACADABRA, in denen kein A neben einem anderen zu stehen kommt.

**Aufgabe 22.** Bestimme die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, in denen keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten sind.

**Aufgabe 23.** Bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$$

jeweils mit den Nebenbedingungen
(a) $x_i \geqslant 0$ für $1 \leqslant i \leqslant 5$;
(b) $x_i \geqslant 0$ für $1 \leqslant i \leqslant 4$ und $x_5 \geqslant 5$;
(c) $x_i \geqslant 0$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant x_4 \leqslant 4$ und $0 \leqslant x_5 \leqslant 4$.

**Aufgabe 24.** Sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen $\lambda \vdash n$, d.h., die Anzahl der Zerlegungen $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ mit $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$. Zeige:
(a) $p(2n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ gerade}) = p(n)$
(b) $p(n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ ungerade}) = p(n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ verschieden})$
Hinweis: Finde jeweils eine bijektive Funktion zwischen den beiden Mengen von Partitionen.

**Aufgabe 25.** Sei $\mathcal{M}_n$ die Menge aller Gitterpfade[†] $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ der Länge $n$, die die Bedingungen

$$y_0 = y_n = 0, \qquad y_k \geqslant 0, k = 0, 1, \ldots, n \qquad |y_k - y_{k-1}| \leqslant 1, k = 1, 2, \ldots, n;$$

d.h., die Höhendifferenz zwischen benachbarten Punkten ist $-1$, $0$, oder $1$.
Zeige, daß die Anzahl $M_n = |\mathcal{M}_n|$ dieser Pfade

(a) die Rekursion $M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}$

(b) die Identität $M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$

erfüllt, wobei $C_n$ die aus der Vorlesung bekannte Folge der Catalanzahlen bezeichnet.

**Aufgabe 26.** Eine Triangulierung eines konvexen $n$-Ecks ist eine Partition der Fläche desselben durch sich gegenseitig nicht schneidenden Diagonalen. Zeige, daß die Anzahl $T_n$ der Triangulierungen des $n$-Ecks für $n \geqslant 3$ die Rekurrenzrelation

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} T_{n-k+2}$$

erfüllt. Dabei ist $T_2 := 1$.

[†] Hier sind die $x$-Koordinaten weggelassen. In der Notation der Vorlesung entspricht das den Gitterpunkten $(0, y_0)$, $(1, y_1)$, $\ldots$, $(n, y_n)$ und die erlaubten Schritte sind $(1, 1), (1, 0), (1, -1)$.

**Aufgabe 27.** Finde für $1 \leqslant k \leqslant 4$ jeweils ein Modell, das das $k$-te Axiom von Peano verletzt und die drei anderen erfüllt.

**Aufgabe 28.** Berechne mit dem euklidischen Algorithmus $\operatorname{ggT}(m,n)$ sowie Zahlen $a$ und $b$, sodaß $\operatorname{ggT}(m,n) = am + bn$ für die folgenden Zahlenpaare:

$$(144, 89) \qquad (7^{15}+1, 7^{12}-1) \qquad (4711, 2019) \qquad (332211, 112233)$$

**Aufgabe 29.** Zeige mit dem euklidischen Algorithmus, dass die Zahlen $m = 9k+4$ und $n = 11k+5$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ koprim sind und bestimme Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sodaß $am + bn = 1$.

**Aufgabe 30.** Zeige (ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung), daß für beliebige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{ggT}(m,n) \cdot \operatorname{kgV}(m,n) = m \cdot n.$$

**Aufgabe 31.** Bestimme

$$\min\{126a + 266b + 315c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$$

sowie Koeffizienten $a$, $b$, $c$, für die das Minimum angenommen wird.

**Aufgabe 32.**

(a) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ Zeige (ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung): Wenn $a|bc$ und $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$, dann gilt $a|c$.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und $d = \operatorname{ggT}(a,b)$. Wir betrachten die Gleichung

$$ax + by = c$$

Zeige: Die Gleichung besitzt eine ganzzahlige Lösung genau dann, wenn $d|c$.

(c) Sei $(x_0, y_0)$ eine Lösung, dann haben alle anderen Lösungen die Form $(x_0 + k\frac{b}{d}, y_0 - k\frac{a}{d})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 33.** Zeige: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch $n$ eine Primzahl.

**Aufgabe 34.** Sei $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Eine Zahl heißt *vollkommen*, wenn $\sigma(n) = 2n$. Zeige:
(a) Wenn $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$, dann ist $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
(b) Wenn $2^p - 1$ eine Primzahl ist, dann ist $2^{p-1}(2^p - 1)$ eine vollkommene Zahl.
(c) Sei $n$ eine vollkommene Zahl, dann ist $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.

**Aufgabe (Fleissaufgabe zu 34).**
(a) Zeige, daß es keine ungeraden perfekten Zahlen gibt.
(b) Finde eine ungerade perfekte Zahl.

**Aufgabe 35.** Zeige: Es gibt eine ganze Zahl der Form $11111\ldots1$, die durch 123456789 teilbar ist. Gib eine obere Schranke für diese Zahl an.

**Aufgabe 36.** Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Dezimalentwicklung $n = \sum a_i 10^i$ gilt

$$11 \mid n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 11 \mid \sum a_i (-1)^i.$$

**Aufgabe 37.** Zeige, daß $p^2 \equiv 1 \mod 24$ für jede Primzahl $p \geqslant 5$ gilt.

**Aufgabe 38.** Bestimme, wenn möglich, die folgenden Inversen:

$$[42]_{172}^{-1}, \qquad [43]_{172}^{-1}, \qquad [44]_{172}^{-1},$$

**Aufgabe 39.** Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen $p$ mit $p \equiv 3 \mod 4$.

**Aufgabe 40.** Berechne $2^{31} \mod 900$.
*Hinweis*: Rechne modulo der Primfaktoren ($900 = 4 \cdot 9 \cdot 25$) und ermittle das Endresultat mit dem chinesischen Restsatz.

**Aufgabe 41.** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $d = \operatorname{ggT}(m, n)$. Zeige, daß das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv a \mod m \\ x &\equiv b \mod n \end{aligned}$$

genau dann lösbar ist, wenn $a \equiv b \mod d$.

**Aufgabe 42.** Zeige:

$$a \equiv b \mod m_1 \quad \wedge \quad a \equiv b \mod m_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \mod m$$

wobei $m = \operatorname{kgV}(m_1, m_2)$.

**Aufgabe 43.** Bestimme, wenn möglich, alle Lösungen der folgenden Kongruenzgleichungssysteme.

$$(a) \quad \begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 6 \\ x &\equiv 3 \mod 10 \\ x &\equiv 5 \mod 15 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \quad \begin{aligned} x &\equiv 4 \mod 6 \\ x &\equiv 2 \mod 10 \\ x &\equiv 7 \mod 15 \end{aligned}$$

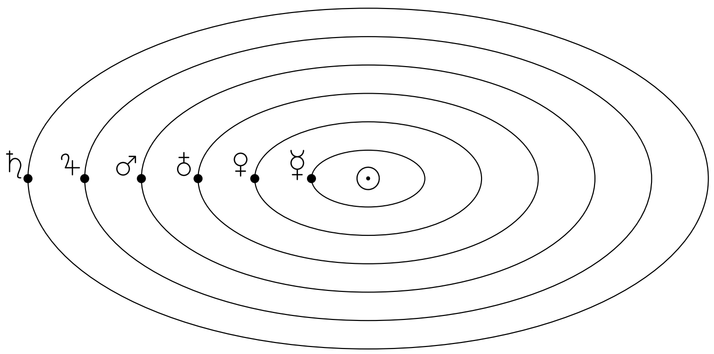
**Aufgabe 44.** Sei $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl mit Primfaktorzerlegung $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Bestimme die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x^2 \equiv 1 \mod m$$

in $\mathbb{Z}_m$.
*Hinweis:*
Verwende den chinesischen Restsatz und die Tatsache, daß eine ungerade Primzahl $p$ nicht gleichzeitig $x + 1$ und $x - 1$ teilen kann.

**Aufgabe** (Fleissaufgabe)**.** Die folgende Tabelle zeigt die Umlaufzeiten ($U$) der frei sichtbaren Planeten, sowie die Zeit in Tagen ($D$), die am 13.5.2025 jeweils vergangen sind, seit jeder einzelne das letzte Mal den Punkt der Wintersonnenwende durchlaufen ist.

| | $U$ | $D$ |
|---|---|---|
| Merkur | 88 | 65 |
| Venus | 225 | 166 |
| Erde | 365 | 151 |
| Mars | 687 | 163 |
| Jupiter | 4333 | 4093 |
| Saturn | 10759 | 5227 |




Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Sonnensystem fix ist und sich der Punkt der Wintersonnenwende nicht ändert. Wieviele Tage sind seit dem letzten *Shangyuan* vergangen, d.h., seit dem Zeitpunkt, als alle Planeten zur Wintersonnenwende am 21.Dezember in einer Reihe standen wie in der Skizze?
*Hinweis:* Mit dem Computer berechnen! Um den chinesischen Restsatz anwenden zu können, vorher Aufgabe 42 anwenden.

**Aufgabe 45.**
(a) Berechne $\varphi(2025)$ und $\varphi(10125000)$.
(b) Ermittle ohne Taschenrechner Zahlen $a, b$, sodaß

$$(25^4)^{2025} \equiv a \mod 77 \qquad 31^{(3^{2025})} \equiv b \mod 77$$

**Aufgabe 46.**
(a) Berechne die Eulersche Funktion $\varphi(m)$ für die Zahl $m = 6885$.
(b) Zeige, daß $a^{\varphi(81)+1} \not\equiv a \mod 81$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{ggT}(a, 81) \in \{3, 9, 27\}$.
(c) Zeige, daß $a^{\varphi(6885)+1} \not\equiv a \mod 6885$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{ggT}(a, 81) \in \{3, 9, 27\}$.
*Hinweis*: Chinesischer Restsatz!

**Aufgabe 47.**
(a) Zeige, daß für jeden Teiler $d$ von $n$ gilt

$$\varphi(n/d) = |\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant n \wedge \operatorname{ggT}(a, n) = d\}|$$

(b) Zeige, daß

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$$

**Aufgabe 48.**
(a) Beschreibe und berechne einen Diffie-Hellman-Merkle-Schlüsselaustausch mit den Parametern $p = 31$, $g = 3$, $a = 13$, $b = 11$.
(b) Zu einem Diffie-Hellman-Merkle-Schlüsselaustausch seien folgende Daten bekannt:

$$g = 8 \qquad p = 29$$
$$g^a = 24 \qquad g^b = 18$$

Bestimme die geheimen Parameter $a$, $b$ und den Schlüssel $r = g^{ab}$.

**Aufgabe 49.** Gegeben sei der RSA-Schlüssel $m = 2701$, $r = 1085$.
(a) Verschlüssle die Botschaft $(3, 4, 5)$.
(b) Bestimme den inversen Schlüssel $s$ und entschlüssle die Botschaft $(2374, 601, 356)$.
*Hinweis:* Für einen Teil der Berechnungen ist wahrscheinlich ein Computer erforderlich.

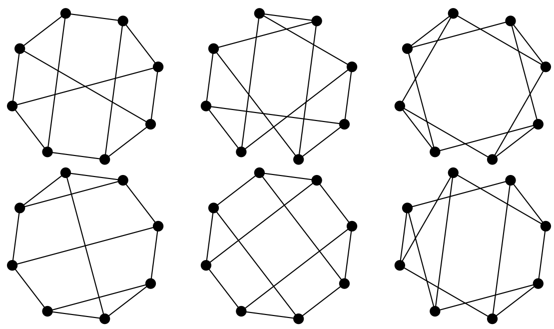
**Aufgabe 50.** Das folgende Beispiel illustriert, daß die Wahl kleiner Schlüssel die Sicherheit des RSA-Verfahrens verringert.
Agent Krasnov schickt dreimal die gleiche Botschaft an seine Kumpel Bibi, Eli und Vladi, die ihm vorher die öffentlichen Schlüssel $(m_1 = 1003, r_1 = 3)$, $(m_2 = 1081, r_2 = 3)$ und $(m_3 = 1189, r_3 = 3)$ bekanntgegeben haben. Die drei verschlüsselten Botschaften sind jeweils $y_1 = (205, 444, 16)$, $y_2 = (664, 1024, 19)$ und $y_3 = (1074, 40, 334)$.
Entschlüssle die Botschaft, ohne die Primfaktorzerlegung der Schlüssel $m_i$ durchzuführen (Computer oder Taschenrechner für Zwischenrechnungen ist zugelassen).

**Aufgabe 51.** Die Gradfolge eines Graphen ist die Folge der Grade der einzelnen Knoten in absteigender Ordnung. Ist es möglich, Graphen (ohne Schleifen und Mehrfachkanten) mit den folgenden Gradfolgen zu konstruieren?

$(a)$ $(3,3,3,3)$ $(b)$ $(4,3,2,1)$

$(c)$ $(3,3,3,2,1)$ $(d)$ $(1,1,1,1,1)$

**Aufgabe 52.** Zwei Graphen $G_1$ und $G_2$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V(G_1) \to V(G_2)$ zwischen beiden Knotenmengen gibt, sodass $[x,y] \in E(G_1) \iff [f(x), f(y)] \in E(G_2)$. Isomorphe Graphen werden üblicherweise identifiziert. Die folgenden Bilder zeigen sechs Graphen, von denen jeweils zwei zueinander isomorph sind. Finde die drei isomorphen Paare.

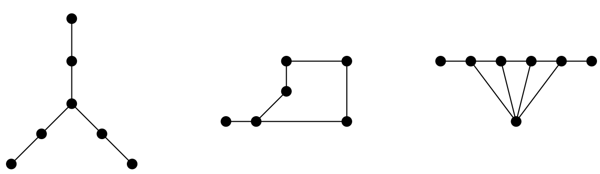


**Aufgabe 53.** Es gibt $64 = 2^{\binom{4}{2}}$ Arten, einen Graphen auf den 4 Knoten ∷ zu zeichnen. Bestimme die alle Isomorphieklassen und die jeweilige Kardinalität; z.B. sind die folgenden Graphpaare isomorph

**Aufgabe 54.** Ein Baum ist definiert als zusammenhängender, kreisfreier Graph. Zeige, daß für einen endlichen Graphen $G = (V,E)$ die folgenden Aussage äquivalent sind.

(i) $G$ ist ein Baum.
(ii) $G$ ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$
(iii) Für je zwei Knoten $u$ und $v$ gibt es genau einen Pfad von $u$ nach $v$.
(iv) $G$ ist kreisfrei und das Hinzufügen einer beliebigen neuen Kante erzeugt einen Kreis.
(v) $G$ ist zusammenhängend und jede Kante ist eine Brücke, d.h., nach Entfernen einer beliebigen Kante ist $G$ nicht mehr zusammenhängend.

**Aufgabe 55.** Seien $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ Paare reeller Zahlen mit $a_i < b_i$. Der *Intervallgraph* ist der Graph $G$ mit den Knoten $v_i = [a_i, b_i]$ und Kantenmenge $E = \{[v_i, v_j] \mid [a_i, b_i] \cap [a_j \cap b_j] \neq \varnothing\}$. Welche der folgenden Graphen sind Intervallgraphen?



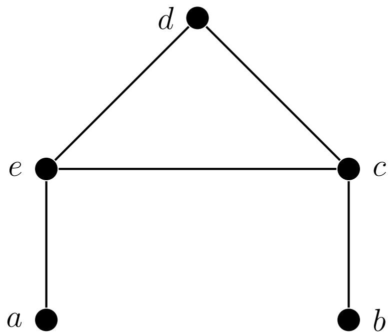
**Aufgabe 56.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der *Kantengraph* von $G$ ist der Graph $L(G) = (E, W)$ wobei $[e_1, e_2] \in W \iff e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$. (In Worten: Die Knoten von $L(G)$ sind die Kanten von $G$ und zwei Kanten werden verbunden, wenn sie einen Knoten gemeinsam haben). Zeige: Wenn der Graph $G$ eine Eulersche Tour besitzt, dann auch der Kantengraph. Gilt auch die Umkehrung?

**Aufgabe 57.** Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ besteht aus der Knotenmenge $V = A \dot\cup B$ mit $|A| = m$ und $|B| = n$ und der Kantenmenge $E = \{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Charakterisiere alle Paare $(m, n)$, für die $K_{m,n}$ eine Eulertour besitzt.
(b) Charakterisiere alle Paare $(m, n)$, für die $K_{m,n}$ einen Hamiltonkreise besitzt.

**Aufgabe 58.** Zeige oder widerlege: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

**Aufgabe 59.** Gegeben sei der folgende Graph.




Bestimme die Adjazenzmatrix und die Anzahl der Wege der Länge 7 vom Knoten $a$ zum Knoten $b$.

**Aufgabe 60.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $L = D - A$, wobei $A$ die Adjazenzmatrix bezeichnet und $D$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $d_{ii} = \deg v_i$, wobei $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Seien $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ die Eigenwerte von $L$ (mit Vielfachheit gezählt). Zeige:

(a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2\,|E|$
(b) $\lambda_1 = 0$
(c) $\dim \ker L = 1$ genau dann, wenn der Graph zusammenhängend ist.

*Hinweis.* Zeige und verwende, dass $u^T L u = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (u_i - u_j)^2$, wobei $a_{ij}$ die Einträge der Adjazenzmatrix sind.
Die Tatsache, dass $L$ diagonalisierbar ist, darf ohne Beweis verwendet werden.