Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

1. Übungsblatt – 18. März 2022

Beispiel 1.1
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeige, dass für alle x, y, $z \in X$ gilt

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

(b) Sei $y \in X$. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} d_y : X &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto d(x,y), \end{aligned}$$

stetig ist.

Beispiel 1.2
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine konkave Funktion mit $f(x) = 0$, genau dann wenn $x = 0$. Zeige, dass $d_\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d_\varphi(x,y) = \varphi(d(x,y))$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Zeige, dass die Funktion $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

eine Metrik auf X definiert.

Beispiel 1.3
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

(a) Zeige, dass die Indikatorfunktion $\chi_A(x) : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A, \\ 0 & \text{wenn } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

stetig ist, genau dann wenn A clopen ist, d.h. offen und abgeschlossen.

(b) Sei $X = \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x - y|$ für x, $y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass A clopen ist, genau dann wenn $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}$.

Beispiel 1.4
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeige, dass für alle $x \in X$ und $r > 0$ gilt

$$\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r).$$

(b) Finde (X, d) und eine Kugel $B(x, r)$, so dass

$$\overline{B(x,r)} \subsetneq \overline{B}(x,r)$$

(c) Finde (X, d) und zwei Kugeln $B(x, r_1)$, $B(y, r_2)$, so dass

$$r_1 > r_2 \quad \text{und} \quad B(x, r_1) \subsetneq B(y, r_2).$$

Beispiel 1.5
Sei

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_1, x_2, \dots\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\} \quad \text{und} \quad d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(a) Zeige, dass (ℓ^p, d_p) ein metrischer Raum ist.
(b) Ist (ℓ^p, d_p) vollständig?
(c) Zeige, dass $\ell^p \subsetneq l^q$ für $1 \leq p < q$.

Beispiel 1.6
Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ metrische Räume und $X = X_1 \times \dots \times X_n$.

(a) Zeige, dass die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \quad \text{für} \quad x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in X$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Zeige: (X, d) ist vollständig $\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}$: (X_i, d_i) ist vollständig.

Beispiel 1.7
Sei $X = \{0, 1\}^n$, die Menge der Binärfolgen der Länge n, und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(x, y) = n + 1 - \min\{k \in \{1, \dots, n+1\} \mid x_k \neq y_k\},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ und $x_{n+1} = 0$, $y_{n+1} = 1$.

(a) Zeige, dass d eine Ultrametrik ist, d.h. eine Metrik die zusätzlich die folgende Bedinung erfüllt:

$$\forall x, y, z \in X : \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

(b) Ist der Raum vollständig?

Beispiel 1.8
Sei

$$X = \{[a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\},$$

die Menge aller abgeschlossenen beschränkten Intervalle in $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $|I| = b - a$ die Länge eines Intervalls $I = [a, b]$.

(a) Zeige, dass die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(I, J) = |I| + |J| - 2\,|I \cap J|$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Konstruiere die Vervollständigung von (X, d).

Beispiel 1.9
Sei $X = (0, 1]$. Zeige:

(a) (X, d) mit der Standardmetrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ist nicht vollständig.

(b) Die Funktion $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d'(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

definiert eine Metrik auf X.

(c) (X, d') ist vollständig.

(d) d' induziert die gleiche Topologie wie d auf X, d.h. die gleichen offenen Mengen in X.