Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

2. Übungsblatt – 1. April 2022

Die folgenden drei Beispiele wurden vom letzten Übungsblatt auf dieses verschoben, weil sie nicht in der Übung besprochen wurden. Die alten Kreuze zählen nicht mehr, die Beispiele müssen erneut im Kreuzesystem angekreuzt werden. Beispiel 1.7 wurde zusätzlich angepasst und Punkt (b) erweitert.

Beispiel 1.7

(a) Sei $X = \{0,1\}^n$, die Menge der Binärfolgen der Länge n, und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(x,y) = n + 1 - \min\{k \in \{1,\dots,n+1\} \mid x_k \neq y_k\},$$

wobei $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n) \in X$ und $x_{n+1} = 0$, $y_{n+1} = 1$. Zeige, dass d eine Ultrametrik ist, d.h. eine Metrik, die zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x,y,z \in X : \quad d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}.$$

(b) Sei (X,d) ein metrischer Raum, wobei d nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass jede Teilmenge von X offen ist und folgere daraus, dass der ultrametrische Raum aus (a) vollständig ist.

Beispiel 1.8

Sei

$$X = \{[a,b] \mid -\infty < a < b < \infty\},$$

die Menge aller abgeschlossenen beschränkten Intervalle in $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $|I| = b - a$ die Länge eines Intervalls $I = [a,b]$.

(a) Zeige, dass die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(I,J) = |I| + |J| - 2\,|I \cap J|$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Konstruiere die Vervollständigung von (X,d).

Beispiel 1.9

Sei $X = (0,1]$. Zeige:

(a) (X,d) mit der Standardmetrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ist nicht vollständig.

(b) Die Funktion $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d'(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

definiert eine Metrik auf X.

(c) (X,d') ist vollständig.

(d) d' induziert die gleiche Topologie wie d auf X, d.h. die gleichen offenen Mengen in X.

Beispiel 2.1
Seien $p,q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < q < \infty$ und $X \subseteq \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Sei $X = [0,1]$, dann gilt
$$L^q(X) \subsetneq L^p(X).$$

(b) Sei $X = \mathbb{R}$, dann gilt
$$L^q(X) \not\subseteq L^p(X), \quad L^p(X) \not\subseteq L^q(X) \quad \text{und} \quad L^q(X) \cap L^p(X) \neq \varnothing.$$

Beispiel 2.2
Sei
$$\ell^\infty = \left\{ x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad d_\infty(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|.$$

Zeige:

(a) (ℓ^∞, d_∞) ist nicht separabel.
(b) $\overline{B}(0,1) = \{x \in \ell^\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Beispiel 2.3
Seien X, Y, Z normierte Räume und $B(X,Y)$ der Raum der beschränkten linearen Abbildungen. Zeige:

(a) $B(X,Y)$ mit der Operatornorm ist ein normierter Raum.
(b) Wenn Y vollständig ist, dann ist auch $B(X,Y)$ vollständig.
(c) Wenn $S : X \to Y$ und $T : Y \to Z$ beschränkte lineare Abbildungen sind, dann ist auch die Hintereinanderausführung ST beschränkt mit $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.
(d) Es gibt X, Y, Z, S, T, so dass Ungleichheit in (c) gilt.

Beispiel 2.4
Seien X, Y normierte Räume und $f \in B(Y, \mathbb{K})$ nicht das Nullfunktional.

(a) Zeige, mit $M = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ gilt:
$$\|f\| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in M} \|x\|}.$$

(b) Sei $y \in Y$ und die Abbildung $T_y : X \to Y$ gegeben durch $T_y(x) = f(x) \cdot y$. Zeige, dass T_y ein beschränkter linearer Operator ist und bestimme seine Operatornorm.