Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

3. Übungsblatt – 29. April 2022

Das folgende Beispiel wurde vom letzten Übungsblatt auf dieses verschoben, weil es nicht in der Übung besprochen wurde und kann erneut angekreuzt werden.

Beispiel 2.4
Seien X, Y normierte Räume und $f \in B(X, \mathbb{K})$ nicht das Nullfunktional.

(a) Zeige, mit $M = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ gilt:

$$\|f\| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in M} \|x\|}.$$

(b) Sei $y \in Y$ und die Abbildung $T_y : X \to Y$ gegeben durch $T_y(x) = f(x) \cdot y$. Zeige, dass T_y ein beschränkter linearer Operator ist und bestimme seine Operatornorm.

Zusatzbeispiel
(Dieses Beispiel kann nicht gekreuzt werden. Wer es freiwillig an der Tafel vorträgt, erhält zusätzliche Tafelpunkte.)
Es seien X und Y normierte Räume. Zeige, wenn X nicht trivial ist und $B(X, Y)$ vollständig, dann ist auch Y vollständig.

Beispiel 3.1
Wir betrachten

$$c_{00} = \left\{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k > n : x_k = 0\right\},$$

den Raum der Folgen, die nur endlich viele Nicht-Null-Einträge haben, mit der Maximumsnorm

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

(a) Zeige, dass $(c_{00}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.

(b) Ist $(c_{00}, \|\cdot\|)$ vollständig?

(c) Bestimme eine Folge $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots) \in c_{00}^{\mathbb{N}}$, wobei $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \|x^{(n)}\| = 1 \quad \text{und für alle } k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)} = 0.$$

(d) Sei $\langle\ ,\ \rangle : c_{00} \times c_{00} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\langle (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k y_k + x_{k+1} y_{k+2} + x_{k+2} y_{k+1}).$$

Definiert $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf c_{00}?

Beispiel 3.2
Sei X ein normierter Raum und B eine Vektorraumbasis von X (auch Hamelbasis genannt), d.h. jeder Vektor aus X kann als endliche Linearkombination von Basisvektoren aus B dargestellt werden. Für $b \in B$ ist die Koordinatenabbildung gegeben durch $\iota_b : X \to \mathbb{K}$ mit

$$\iota_b(x) = \lambda_b \quad \text{für} \quad x = \sum_{b \in B} \lambda_b \, b.$$

(a) Zeige, dass ι_b ein lineares Funktional ist.
(b) Zeige, wenn X endlichdimensional ist, dann ist ι_b beschränkt.
(c) Finde einen Raum X mit Basis B und $b \in B$, sodass die Koordinatenabbildung ι_b unbeschränkt ist.

Beispiel 3.3
Sei X ein normierter Raum. Zeige, dass X vollständig ist genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe einen Grenzwert hat, d.h., wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists y \in X : \lim_{N\to\infty} \left\| y - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| = 0.$$

Beispiel 3.4
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und M ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeige, der Faktorraum $(X/M, \|\cdot\|)$ mit

$$\|x + M\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \quad \text{für} \quad x + M \in X/M$$

ist ein Banachraum.

Beispiel 3.5
Es sei H ein Hilbertraum.

(a) Sei M ein abgeschlossener Unterraum von H und $x \in H$. Zeige, dass

$$\min\{\|x - y\| \mid y \in M\} = \max\left\{ |\langle x, y\rangle| \;\middle|\; y \in M^{\perp}, \|y\| = 1 \right\}.$$

(b) Seien X, Y Unterräume von H, wobei $\dim(X) < \infty$ und $\dim(X) < \dim(Y)$. Zeige, dass $\dim(Y \cap X^{\perp}) > 0$.

Beispiel 3.6
Sei $M = \left\{ f \in L^2([-1,1]) \;\middle|\; f(x) = f(-x) \text{ für fast alle } x \in [0,1] \right\}$.

(a) Zeige, dass M ein abgeschlossener Teilraum von $L^2([-1,1])$ ist.
(b) Bestimme $M^{\perp}$.