

Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022
Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

4. Übungsblatt – 6. Mai 2022

Das folgende Beispiel wurde vom letzten Übungsblatt auf dieses verschoben, weil es nicht in der Übung besprochen wurde und kann erneut angekreuzt werden.

Beispiel 3.6

Sei $M = \left\{ f \in L^2([-1, 1]) \mid f(x) = f(-x) \text{ für fast alle } x \in [0, 1] \right\}$.

(a) Zeige, dass M ein abgeschlossener Teilraum von $L^2([-1, 1])$ ist.

(b) Bestimme $M^\perp$.

Beispiel 4.1

Seien X, Y, Z normierte Räume und $T : X \times Y \rightarrow Z$ eine Abbildung auf dem Produktraum $X \times Y$ mit der Norm $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, die in beiden Komponenten linear ist, d.h. für alle $x, x' \in X, y, y' \in Y$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$T(\lambda x + \mu x', y) = \lambda T(x, y) + \mu T(x', y),$$

$$T(x, \lambda y + \mu y') = \lambda T(x, y) + \mu T(x, y').$$

Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

- (i) T ist stetig,
- (ii) T ist stetig in $(0, 0)$,
- (iii) T ist beschränkt im folgenden Sinn: Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$,

$$\|T(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

Beispiel 4.2

Seien X, Y, Z und T wie in Beispiel 4.1.

- (a) Sei X oder Y zusätzlich ein Banachraum. Zeige, die obigen Eigenschaften (i) bis (iii) sind äquivalent zur Eigenschaft
- (iv) T ist jeweils stetig in x und y , d.h., für jedes $y \in Y$ und $x \in X$ sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} T_y : X \rightarrow Z, & & T_x : Y \rightarrow Z, \\ x \mapsto T(x, y) & \text{und} & y \mapsto T(x, y) \end{array}$$

stetig.

- (b) Finde normierte Räume X, Y und eine Abbildung $T : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$, die Bedingung (iv) erfüllt, aber nicht die Bedingungen (i) bis (iii).

Beispiel 4.3

Sei H ein Hilbertraum und $T : H \rightarrow \mathbb{K}^n$ linear und beschränkt. Zeige, für $M = \ker(T)$ gilt

$$\dim(M^\perp) \leq n$$

mit Gleichheit genau dann, wenn T surjektiv ist.

Beispiel 4.4

Wir betrachten die Teilräume

$$M = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty \right\},$$

$$N = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 \mid x_{2k-1} = x_{2k} \ \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

von ℓ^2 .

- (a) Bestimme $M^\perp$ und $(M^\perp)^\perp$.
- (b) Ist M abgeschlossen?
- (c) Ermittle $N^\perp$.
- (d) Zeige, $\ell^2 = N \oplus N^\perp$.
- (e) Finde die Zerlegung von $(n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ in $N \oplus N^\perp$, d.h.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N \quad \text{und} \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N^\perp \quad \text{mit} \quad (n^{-1})_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Beispiel 4.5

Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge.

- (a) Angenommen, für alle Folgen $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty.$$

Zeige, dass dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

- (b) Sei nun (a_n) gegen ∞ divergent. Zeige, dass eine Folge $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{divergiert.}$$

Hinweis: Verwende die ℓ^p -Räume in Verbindung mit Banach-Steinhaus.

Beispiel 4.6

Seien X, Y, Z Banachräume und $T : Y \rightarrow Z$ eine beschränkte lineare Abbildung.

- (a) Sei $S : X \rightarrow Z$ eine beschränkte lineare Abbildung und die folgende Eigenschaft gegeben:

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y : Sx = Ty.$$

Zeige, dass die dadurch eindeutig festgelegte Abbildung $U : X \rightarrow Y$ linear und beschränkt ist.

- (b) Sei $S : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Weiters sei T injektiv und die Hintereinanderausführung TS beschränkt. Zeige, dass dann auch S beschränkt ist.