

Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022
Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz
5. Übungsblatt – 20. Mai 2022

Die folgenden zwei Beispiele wurde vom letzten Übungsblatt auf dieses verschoben, weil sie nicht in der Übung besprochen wurden und können erneut angekreuzt werden.

Beispiel 4.5

Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge.

- (a) Angenommen, für alle Folgen $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty.$$

Zeige, dass dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

- (b) Sei nun (a_n) gegen ∞ divergent. Zeige, dass eine Folge $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{divergiert.}$$

Hinweis: Verwende die ℓ^p -Räume in Verbindung mit Banach-Steinhaus.

Beispiel 4.6

Seien X, Y, Z Banachräume und $T : Y \rightarrow Z$ eine beschränkte lineare Abbildung.

- (a) Sei $S : X \rightarrow Z$ eine beschränkte lineare Abbildung und die folgende Eigenschaft gegeben:

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : Sx = Ty.$$

Zeige, dass die dadurch eindeutig festgelegte Abbildung $U : X \rightarrow Y$ linear und beschränkt ist.

- (b) Sei $S : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Weiters sei T injektiv und die Hintereinanderausführung TS beschränkt. Zeige, dass dann auch S beschränkt ist.

Beispiel 5.1

Sei $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$, $Y = (C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ und $T : X \rightarrow Y, f \mapsto f$.

- (a) Zeige, dass T linear, beschränkt und invertierbar ist.
- (b) Bestimme die Norm von T .
- (c) Zeige, dass T^{-1} unbeschränkt und abgeschlossen ist.
- (d) Warum stehen diese Aussagen nicht im Widerspruch zum Satz der offenen Abbildung oder zum Satz vom abgeschlossenen Graphen?

Beispiel 5.2

Sei X ein Banachraum.

- (a) Sei $T : X \rightarrow X$ ein idempotenter linearer Operator, d.h. $T^2 = T$. Zeige, dass T beschränkt ist, genau dann wenn $\text{im}(T)$ und $\ker(T)$ abgeschlossen sind.
- (b) Seien U und V Unterräume von X , so dass $X = U \oplus V$ (direkte Summe). Zeige, dass die Projektion

$$P : X \rightarrow X, \quad x = u + v \mapsto u$$

beschränkt ist, genau dann wenn U und V abgeschlossen sind.

Beispiel 5.3

Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Sei $G = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f(x, y) = x$. Zeige, dass

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y)^\top \mapsto \frac{x + 2y}{5}.$$

die eindeutige Hahn-Banach-Erweiterung ist, d.h. F ist die einzige Erweiterung von f auf $\mathbb{R}^2$ mit $\|F\| = \|f\|$.

Beispiel 5.4

Sei $v = (1, 1)^\top \in \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{L}(\{v\}) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die lineare Hülle von $\{v\}$. Bestimme alle Hahn-Banach-Erweiterungen des Funktional

$$f : \mathcal{L}(\{v\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda v \mapsto \lambda$$

auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich folgender Normen:

- (a) $\|(x, y)^\top\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ für $p \geq 1$,
- (b) $\|(x, y)^\top\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

Beispiel 5.5

Seien X und Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator.

- (a) Sei $X' = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ eine linear unabhängige Menge und $Y' = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$. Zeige, dass T existiert, so dass $T(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, n$ und bestimme abhängig von X' , Y' und der Norm auf X eine untere und eine obere Schranke für $\|T\|$.
- (b) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und Y nicht trivial. Zeige, dass T existiert mit $T(x_1) \neq T(x_2)$.
- (c) Sei $Y = \mathbb{K}$ und $x \in X$ mit $x \neq 0$. Zeige, dass T existiert mit $T(x) = \|x\|$ und $\|T\| = 1$.

Beispiel 5.6

Sei X ein normierter Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ein lineares Funktional.

- (a) Zeige, wenn f unbeschränkt ist, dann ist $\ker(f)$ dicht in X .
- (b) Zeige, f ist beschränkt, genau dann wenn $\ker(f)$ abgeschlossen ist.
- (c) Sei f beschränkt und $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ ein weiteres beschränktes lineares Funktional. Zeige, es existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $f = \lambda g$, genau dann wenn $\ker(f) = \ker(g)$.