Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

6. Übungsblatt – 10. Juni 2022

Die folgenden zwei Beispiele wurde vom letzten Übungsblatt auf dieses verschoben, weil sie nicht in der Übung besprochen wurden und können erneut angekreuzt werden.

Beispiel 5.5
Seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator.

(a) Sei $X' = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ eine linear unabhängige Menge und $Y' = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$. Zeige, dass T existiert, so dass $T(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und bestimme abhängig von X', Y' und der Norm auf X eine untere und eine obere Schranke für $\|T\|$.

(b) Seien x_1, $x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und Y nicht trivial. Zeige, dass T existiert mit $T(x_1) \neq T(x_2)$.

(c) Sei $Y = \mathbb{K}$ und $x \in X$ mit $x \neq 0$. Zeige, dass T existiert mit $T(x) = \|x\|$ und $\|T\| = 1$.

Beispiel 5.6
Sei X ein normierter Raum und $f : X \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional.

(a) Zeige, wenn f unbeschränkt ist, dann ist $\ker(f)$ dicht in X.

(b) Zeige, f ist beschränkt, genau dann wenn $\ker(f)$ abgeschlossen ist.

(c) Sei f beschränkt und $g : X \to \mathbb{K}$ ein weiteres beschränktes lineares Funktional. Zeige, es existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $f = \lambda g$, genau dann wenn $\ker(f) = \ker(g)$.

Beispiel 6.1
Sei X ein Banachraum, X^* der Dualraum und X^{**} der Bidualraum. Für $x \in X$ sei $U_x \in X^{**}$ mit $U_x(f) = f(x)$ für $f \in X^*$. Zeige, dass die Abbildung $U : X \to X^{**}, x \mapsto U_x$ eine isometrische Einbettung von X in X^{**} ist, d.h.

(a) U ist injektiv,

(b) für alle $x \in X$ gilt $\|x\| = \|U(x)\|$.

Beispiel 6.2
Sei X ein normierter Raum und Y ein Teilraum von X.

(a) Sei $x \in X$. Zeige, es existiert genau dann ein lineares Funktional $f \in X^*$ mit $f(y) = 0$ für alle $y \in Y$ und $f(x) \neq 0$, wenn $x \notin \overline{Y}$.

(b) Zeige, wenn X reflexiv und Y abgeschlossen ist, dann ist auch Y reflexiv.

Beispiel 6.3
Sei X ein normierter Raum. Zeige:

(a) Wenn X reflexiv ist, dann ist auch X^* reflexiv.

(b) Wenn X ein Banachraum und X^* reflexiv ist, dann ist auch X reflexiv.

Beispiel 6.4

(a) Sei X ein reflexiver nomierter Raum. Zeige, es existiert für jedes $f \in X^*$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$, sodass $f(x) = \|f\|$.

(b) Folgere aus (a), dass c, der Raum der konvergenten Folgen über $\mathbb{R}$ mit Supremumsnorm, nicht reflexiv ist.

Beispiel 6.5
Wir betrachten Folgen über $\mathbb{R}$ (siehe Beispiel 1.5, 2.2 und 3.1), wobei c_0 der Raum der gegen 0 konvergenten Folgen mit der Supremumsnorm ist. Zeige:

(a) $c_{00}^* = c_0^* = \ell^1$.
(b) $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

Beispiel 6.6
Sei X ein Banachraum. Zeige:

(a) Wenn der Dualraum X^* separabel ist, dann ist auch X separabel.
(b) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.