Einführung in die Funktionalanalysis SS 2022

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

7. Übungsblatt – 24. Juni 2022

Die folgenden drei Beispiele wurde vom letzten Übungsblatt auf dieses verschoben, weil sie nicht in der Übung besprochen wurden und können erneut angekreuzt werden.

Beispiel 6.4

(a) Sei X ein reflexiver nomierter Raum. Zeige, es existiert für jedes $f \in X^*$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$, sodass $f(x) = \|f\|$.

(b) Folgere aus (a), dass c, der Raum der konvergenten Folgen über $\mathbb{R}$ mit Supremumsnorm, nicht reflexiv ist.

Beispiel 6.5

Wir betrachten Folgen über $\mathbb{R}$ (siehe Beispiel 1.5, 2.2 und 3.1), wobei c_0 der Raum der gegen 0 konvergenten Folgen mit der Supremumsnorm ist. Zeige:

(a) $c_{00}^* = c_0^* = \ell^1$.

(b) $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

Beispiel 6.6

Sei X ein normierter Raum. Zeige:

(a) Wenn der Dualraum X^* separabel ist, dann ist auch X separabel.

(b) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beispiel 7.1

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in B(H, H)$. Zeige:

(a) Wenn $\langle T(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in H$, dann ist $T = 0$.

(b) Es gilt $T = T^*$ genau dann, wenn $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.

Beispiel 7.2

Sei H ein Hilbertraum, $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ eine Folge und $x \in H$. Zeige, dass

$$x_n \to x \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \text{ konvergiert schwach gegen } x \text{ und } \|x_n\| \to \|x\|.$$

Ist die Vollständigkeit von H eine notwendige Voraussetzung für die Äquivalenz?

Beispiel 7.3

Seien X und Y Banachräume.

(a) Zeige, dass $T \in B(X, Y)$ kompakt ist, genau dann wenn jede beschränkte Folge $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ eine Teilfolge (x_{n_k}) hat, sodass $T(x_{n_k})$ in Y konvergiert.

(b) Seien X und Y Banachräume und $S, T \in B(X, Y)$ kompakte Operatoren. Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{K}$ der Operator $aS + bT$ kompakt ist.

Beispiel 7.4

Sei $T : \ell^1 \to \ell^1, (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$.

(a) Ermittle das Spektrum $\sigma(T)$ und das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ (die Menge der Eigenwerte).

(b) Bestimme T^*, $\sigma(T^*)$ und $\sigma_p(T^*)$.

(c) Sind T bzw. T^* kompakt?