Name:
Matrikelnummer: Übungsgruppe:

2.Test Lineare Algebra I – MUSTERAUFGABEN

Aufgabe 1. Seien

$$U_1 = \mathcal{L}(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\5\\0\end{bmatrix}) \qquad U_2 = \mathcal{L}(\begin{bmatrix}-1\\3\\-3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\3\end{bmatrix})$$

zwei Unterräume des $\mathbb{R}^4$. Bestimme jeweils eine Basis von U_1, U_2, $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2. Sei U der von den folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\1\\0\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-4\\-3\\-1\end{bmatrix}$$

(a) Welche der Vektoren

$$\begin{bmatrix}3\\4\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

sind in U enthalten?

(b) Bestimme eine Basis für U.

(c) Bestimme eine Basis eines Unterraums $W \subseteq \mathbb{R}^4$ sodaß $\mathbb{R}^4 = U \dot{+} W$.

Aufgabe 3. Berechne jeweils eine Basis von Kern und Bildraum der linearen Abbildung

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$$

Aufgabe 4. Zeige, daß genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ existiert, sodaß

$$\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix} \in \ker A, \qquad A \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}, \qquad A \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

und bestimme diese Matrix.

Aufgabe 5. Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige

(a) $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$

(b) Wenn $\ker f = \ker(f \circ f)$, dann ist auch $\ker(f \circ f) = \ker(f \circ f \circ f)$.

Aufgabe 6. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome.

(a) Zeige, daß $V = U_+ \dot{+} U_-$, wobei

$$U_+ = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \qquad U_- = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

(b) Bestimme die Projektionsabbildungen

$$P_+ : V \to U_+ \quad \text{und} \quad P_- : V \to U_-.$$