

Aufgabe 13. Zeige, daß $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine Gruppe ist. Löse in G die Gleichung

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$

Aufgabe 14. Erstelle die Verknüpfungstafel der multiplikativen Halbgruppe $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ und bestimme alle invertierbaren Elemente.

Aufgabe 15. Zeige: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung $n = \sum_{i \geq 0} a_i 10^i$ gilt

$$11 \text{ teilt } n \iff 11 \text{ teilt } \sum_{i \geq 0} (-1)^i a_i$$

Aufgabe 16. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe der Ordnung $N^\dagger$ mit neutralem Element e .

(a) Zeige: Für jedes $x \in G$ existiert eine natürliche Zahl n mit $1 \leq n \leq N$ sodass

$$x^n = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ Stück}} = e.$$

Die kleinste solche Zahl n wird als *Ordnung von x in G* bezeichnet.

Hinweis: Betrachten Sie die Elemente $x^0 (= e), x^1, \dots, x^N$. Wie viele davon können verschieden sein?

(b) Bestimme die Ordnung aller Elemente der Gruppe $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$.

Aufgabe 17.

(a) Erstelle die Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$.

(b) Bestimme für jedes Element $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ jeweils den kleinsten Exponenten sodaß $\sigma^k = e$ (siehe Aufgabe 16).

Aufgabe 18. Wir betrachten ein Quadrat $ABCD$.

(a) Finde alle Elemente der Symmetriegruppe und stelle sie als Permutationen der Eckpunkte dar.

(b) Bestimme die Ordnung (s. Aufgabe 16) aller Elemente.

(c) Fleissaufgabe: Erstelle die vollständige Verknüpfungstafel.

Aufgabe 19. Sei $(G, \circ)$ eine Halbgruppe. Wir betrachten folgende Eigenschaften:

(i) $\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a$

(ii) $\forall a \in G \exists b \in G : a \circ b = e$

(iii) $\forall a \in G \exists b \in G \forall c \in G : a \circ b \circ c = c$

(a) Zeige, daß (i) $\wedge$ (ii) $\iff$ (iii).

(b) Finde ein Beispiel einer Halbgruppe, die die Eigenschaften (i)–(iii) aufweist, aber keine Gruppe ist.

[†]d.h., G hat N Elemente.