Aufgabe 20. Rechne nach, daß die Abbildung

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\mapsto 1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\mapsto 1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\mapsto 1$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\mapsto -1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\mapsto -1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\mapsto -1$$

von $(\mathfrak{S}_3,\circ)\to(\{\pm 1\},\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 21. Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Abbildung $f: G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$ bijektiv ist und daß f ein Automorphismus ist genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 22. Sei $h: G_1\to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus und $H_1\subseteq G_1$ eine Untergruppe. Zeige, daß $\operatorname{im} h = h(H_1)$ eine Untergruppe von G_2 ist.

Aufgabe 23. Eine abelsche Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine nichttrivialen Untergruppen besitzt. Zeige, daß $(\mathbb{Z}_n,+)$ einfach ist genau dann, wenn $n\in\mathbb{P}$ (Primzahl).

Aufgabe 24. Wir betrachten $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ mit den Verknüpfungen

$$a\oplus b=\max(a,b) \qquad a\odot b=a+b$$

(a) Welche Ringaxiome sind erfüllt? Welches Element muß hinzugefügt werden, um ein neutrales Element bezüglich der Addition $\oplus$ zu erhalten?
(b) Löse das “lineare” Gleichungssystem

$$((-1)\odot x)\oplus(\epsilon\odot y)=1$$
$$((-2)\odot x)\oplus(0\odot y)=1$$

wobei ϵ das unter (a) gefundene neutrale Element bezüglich Addition bezeichnet.

Aufgabe 25. Zeige, daß $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2):=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$
$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2):=(a_1b_1+a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)$$

einen kommutativen Ring bildet und bestimme Einselement, Nullteiler und invertierbare Elemente.

Aufgabe 26. Zeige die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen z, z_1, z_2:

(a) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ (b) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
(c) $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$ (d) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
(e) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (f) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
(g) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Aufgabe 27. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} i\,x & + & y & + & z & = & 1+i\\ (1+2i)\,x & + & 3\,y & + & (1+i)\,z & = & 4+i\\ -x & + & (-1+i)\,y & - & z & = & -1+i \end{array}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.