

Aufgabe 28. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 29. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume (mit den üblichen Operationen)?

- | | |
|---|---|
| (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$ | (g) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_3\}$ |
| (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 1\}$ | (h) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$ |
| (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq 0\}$ | (i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3\}$ |
| (d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_3 = 0\}$ | (j) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ |
| (e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = x_3\}$ | |
| (f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i \in \{1, 2, 3\}\}$ | |

Aufgabe 30. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ aller Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- | | |
|--|---|
| (a) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$ | (f) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$ |
| (b) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ | (g) $\{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ |
| (c) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) + f(1) = f(2)\}$ | |
| (d) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C > 0 \forall x \in \mathbb{R} : f(x) < C\}$ | |
| (e) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } x \in \mathbb{R}\}$ | |

Aufgabe 31. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (x', y') &= (x + x', 0) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, 0) \end{aligned}$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

Aufgabe 32. Betrachte $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den Operationen

$$a \oplus b := \sqrt[3]{a^3 + b^3} \qquad \lambda \odot a := \sqrt[3]{\lambda} \cdot a.$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

Aufgabe 33. Sei V ein Vektorraum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei ein Unterraum W_n von V gegeben, sodaß für alle $m < n$ gilt $W_m \subseteq W_n$. Ist die Vereinigung aller W_n auch ein Unterraum von V ?

Aufgabe 34. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

Eine *lineare Mannigfaltigkeit* (auch: *affiner Unterraum* von V) ist eine Menge der Form

$$\mathcal{L} = v_0 + U = \{v_0 + u : u \in U\},$$

wobei $v_0 \in V$ ein fixer Vektor und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V ist.

- (a) Zeige, daß für alle $v \in V$ gilt $v \in \mathcal{L} \iff \mathcal{L} = v + U$.
- (b) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind
- (i) $\mathcal{L} \subseteq V$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit.
 - (ii) $\exists a \in \mathcal{L} : \forall b_1, b_2 \in \mathcal{L}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \text{ gilt: } a + \lambda_1(b_1 - a) + \lambda_2(b_2 - a) \in \mathcal{L}$.