Aufgabe 35. Für welche Werte von α ist der Vektor $u = (1, -2, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren $v = (3, 0, -2)$ und $w = (2, -1, -5)$ darstellbar?

Aufgabe 36. Welche Gleichung müssen die Koordinaten a, b, c des Vektors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ erfüllen, damit er in der linearen Hülle der Vektoren $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$ und $w = (0, 3, -4)$ liegt?

Aufgabe 37. Sei V ein Vektorraum und seien $M, N \subseteq V$ Teilmengen.
Zeige, daß $[M] = [N]$ gilt genau dann, wenn

$$\forall x \in M : x \in [N] \wedge \forall x \in N : x \in [M]$$

Aufgabe 38. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $M \subseteq V$ ein beliebiges Erzeugendensystem. Zeige, daß man aus M eine endliches Erzeugendensystem auswählen kann.

Aufgabe 39. Welche der folgenden Mengen im Vektorraum

$$(a) \quad \mathbb{R}^3 \qquad\qquad (b) \quad (\mathbb{Z}_5)^3$$

sind linear unabhängig?

$$A = \{(1,0,2), (1,0,3)\} \qquad B = \{(1,0,2), (3,0,1)\}$$
$$C = \{(1,0,2), (1,0,3), (1,0,4)\} \qquad D = \{(1,0,2), (1,0,3), (1,1,4)\}$$

Drücke andernfalls einen Vektor als Linearkombination der beiden anderen Vektoren aus.

Aufgabe 40. Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $u = (\alpha, 1, 0)$, $v = (1, \alpha, 1)$ und $w = (0, 1, \alpha)$ im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

Aufgabe 41. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.
Zeige oder widerlege: Eine Familie (v_1, v_2, v_3) von Vektoren ist linear unabhängig genau dann, wenn die Familie $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 42. Sei V ein Vektorraum und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine lineare unabhängige Teilmenge $M_n \subseteq V$ gegeben sodaß

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N} : M_n \subseteq M_{n+1}$$

(a) Zeige, daß $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ebenfalls linear unabhängig ist.
(b) Gib ein Beispiel, das zeigt, daß diese Aussage ohne die Bedingung $(*)$ im Allgemeinen nicht gilt.