Aufgabe 43. Sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimme eine Basis von U.
(b) Erweitere diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 44. Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zeige, daß die Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden und tausche die Vektoren v_1 und v_2 gemäß dem Austauschsatz von Steinitz in diese Basis ein.

Aufgabe 45. Finde Basen der folgenden Unterräume von $V := \mathbb{R}[x]_4 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 : a_i \in \mathbb{R}\}$

(a) $U = \{p \in V : p(0) = 0 \land p'(0) = 0\}$
(b) $W = \{p \in V : p'(1) = p''(1)\}$

Aufgabe 46. Sei $M = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem für einen Vektorraum V. Zeige, daß M eine Basis von V ist genau dann, wenn *mindestens* ein Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von M hat.

Aufgabe 47. Sei

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3-a \\ 0 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1+a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme eine Basis und die Dimension von $U = [u_1, u_2, u_3, u_4] \subseteq \mathbb{R}^4$ abhängig von $a \in \mathbb{R}$. Für die Fälle, in denen $\dim U < 4$ ist, ergänze die gegebenen Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 48. Sei $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine Basis eines Vektorraums V. Beschreibe alle Vektoren $v \in V$, sodaß $(v, b_2, b_3, \dots, b_n)$, $(b_1, v, b_3, \dots, b_n)$, $\dots$, $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, v)$ jeweils eine Basis von V ist.

Aufgabe 49. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit Koordinatenvektoren $\Phi_B(v_i) = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$, d.h., eindeutigen Darstellungen $v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} b_j$.
Zeige: Die Familie $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ is linear unabhängig genau dann, wenn die Familie der Koordinatenvektoren

$$(\Phi_B(v_1), \Phi_B(v_2), \dots, \Phi_B(v_k))$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 50. Sei $\dim V = n < \infty$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim U = r$. Zeige: Es gibt eine Basis B von V, sodaß die Koordinatenabbildung $\Phi_B : V \to \mathbb{K}^n$, die jedem Vektor $v \in V$ den Koordinatenvektor bezüglich B zuordnet, den Unterraum U bijektiv auf den Unterraum $\{(x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ abbildet.