

Aufgabe 58. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathcal{F} = \mathbb{K}^{\mathbb{K}} := \{f \mid f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\}$ der $\mathbb{K}$ -Vektorraum aller Funktionen mit den Vektorraumoperationen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Für $M \subseteq \mathbb{K}$ sei $\mathcal{F}_M := \{f \in \mathcal{F} \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{K} \setminus M\}$. Zeige:

- (1) Für alle $M \subseteq \mathbb{K}$ ist $\mathcal{F}_M$ ein Unterraum von $\mathcal{F}$.
- (2) Für $M, N \subseteq \mathbb{K}$ gilt $\mathcal{F}_{M \cap N} = \mathcal{F}_M \cap \mathcal{F}_N$ und $\mathcal{F}_{M \cup N} = \mathcal{F}_M + \mathcal{F}_N$.

Für welche $M, N \subseteq \mathbb{K}$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M \oplus \mathcal{F}_N$?

Aufgabe 59. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome und $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

- (a) Zeige, daß U einen Unterraum von V bildet.
- (b) Bestimme für $f \in V$ die lineare Mannigfaltigkeit $f + U$.
- (c) Bestimme eine Basis des Faktorraums V/U .

Aufgabe 60. Welche der folgenden Abbildungen $V \rightarrow W$ sind linear?

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}, \varphi(x, y, z) = x(y + z),$
- (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3, V = \mathbb{Z}_3^2, W = \mathbb{Z}_3, f: (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^3.$
- (c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}[x], p(x) \mapsto x^2 \cdot p(x).$
- (d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}[x], p(x) \mapsto p(x^2).$
- (e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}[x], p(x) \mapsto p(x)^2.$

Aufgabe 61. Bestimme die Hintereinanderausführung $g \circ f$ der Abbildungen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}[x] &\rightarrow \mathbb{R}[x] & g: \mathbb{R}[x] &\rightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\mapsto p'(2x)/2 + 1 & p(x) &\mapsto p'(2) \end{aligned}$$

Welche der involvierten Abbildungen sind linear?

Aufgabe 62. Sei $V = U \dot{+} W$ die direkte Summe zweier Unterräume. Dann hat jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = u + w$. Zeige

- (a) Die Abbildungen $P, Q: V \rightarrow V, P: v \mapsto u$ und $Q: v \mapsto w$ sind linear.
- (b) Wenn $V = U \dot{+} W_1 = U \dot{+} W_2$ mit entsprechenden Projektionen P_1, Q_1 und P_2, Q_2 , dann ist $W_1 = W_2$ genau dann, wenn $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$.

Aufgabe 63. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} R_f: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & L_f: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ g &\mapsto g \circ f & g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

vom Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sich selbst. Zeige:

- (a) R_f ist linear.
- (b) L_f ist linear genau dann, wenn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear ist.
- (c) R_f ist bijektiv genau dann, wenn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Aufgabe 64. Seien U, V Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L: U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Weiters sei $b \in V$ gegeben und $x_0 \in U$ eine Lösung der Gleichung

$$(\dagger) \quad L(x) = b.$$

Zeige, dass $\{x_0 + w \mid w \in \ker L\}$ die Menge aller Lösungen der Gleichung $(\dagger)$ ist. Gib eine hinreichende Bedingung für L an, so dass es genau ein $x \in V$ gibt, das $(\dagger)$ löst.