

Aufgabe 65. Gegeben seien die linearen Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \quad g : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \quad h : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$$

Zeige, daß die Familie (f, g, h) im Vektorraum $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 66. Sei V ein Vektorraum $F : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit F^k die k -fache Hintereinanderausführung $\underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \times}$. Sei $v \in V \setminus \{0\}$ ein Vektor mit der

Eigenschaft, daß $F^{n-1}(v) \neq 0$ ist aber $F^n(v) = 0$ für ein $n \geq 1$. Zeige, daß die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \dots, F^{n-1}(v)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 67. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $\text{im } \varphi = \ker \varphi$.

- (a) Bestimme $\varphi \circ \varphi$.
- (b) Zeige, daß $\dim V$ gerade ist.
- (c) Sei $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von $\text{im } \varphi = \ker \varphi$ und seien $w_1, w_2, \dots, w_n$ Vektoren, sodaß $\varphi(w_i) = v_i$ für jedes i . Zeige, daß $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ linear unabhängig ist.
- (d) Zeige, daß $B \cup C$ eine Basis von V ist.
- (e) Gib ein konkretes Beispiel einer solchen Abbildung.

Aufgabe 68. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft daß $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist. Diese Eigenschaft wird *Idempotenz* genannt und ein idempotenter Endomorphismus heißt *Projektion*. Zeige, dass $V = \text{im } \varphi \oplus \ker \varphi$ (direkte Summe)

Aufgabe 69. Berechne alle möglichen Matrixprodukte von jeweils zwei der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 70. Bestimme jeweils eine Basis von Kern- und Bildraum der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 71. Bestimme die Matrix S_α der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechne die Matrix $S_\alpha \cdot S_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.

Aufgabe 72. Zeige oder widerlege:

- (a) Eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ kommutiert mit allen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
- (b) Diagonalmatrizen gleicher Größe kommutieren miteinander.
- (c) Wenn A und B jeweils 2×2 Matrizen sind und $AB = 0$, dann ist $BA = 0$.