Aufgabe 73. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^2 \\ A &\mapsto Av \end{aligned}$$

mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear ist und bestimme jeweils eine Basis von Kern und Bild.

Aufgabe 74. Seien U, V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ sowie $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß $\dim\ker(g\circ f) \leq \dim\ker f + \dim\ker g$.
Hinweis: Berechne Kern und Bild der linearen Abbildung $h = f\,|_{\ker g\circ f} \to V$.

Aufgabe 75. Konstruiere, wenn möglich, jeweils ein Beispiel für lineare Abbildungen $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllten, und begründe widrigenfalls, warum es kein Beispiel geben kann:
(a) f hat keinen Fixpunkt.
(b) f ist bijektiv und hat genau einen Fixpunkt.
(c) f hat genau 2 Fixpunkte.
(d) $f \neq \mathrm{id}$ und f hat mehr als einen Fixpunkt.

Aufgabe 76. Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Berechne zuerst ein paar Werte A^2, A^3 um eine Formel für allgemeines n zu "erraten" und beweise diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 77. Zwei $n \times n$-Matrizen A und B *kommutieren* miteinander, wenn $AB = BA$.
(a) Zeige, daß für eine gegebene Matrix A die Menge $\{A\}' = \{B \mid AB = BA\}$ eine Teilalgebra von $\mathbb{K}_{n\times n}$ bildet, d.h., einen Unterraum, der auch bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist.
(b) Bestimme $\{A\}'$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 78. Sei V ein Vektorraum der Dimension n über einem Körper $\mathbb{K}$. Weiterhin seien $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ und $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ zwei Basen von V, dann können deren Elemente jeweils in der anderen Basis dargestellt werden:

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} b_i \qquad \text{und } b_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} c_i$$

Zeige: die Matrizen $B = [\beta_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ und $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ zueinander invers und damit insbesondere invertierbar.

Aufgabe 79. Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{3,4}^{(r)}$ und bestimme Matrizen P und Q sodaß $PAQ = I_{3,4}^{(r)}$.