Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen (mit den üblichen Operationen + und $\cdot$) bilden Vektorräume?

(a) $\{p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}, p(1) = 0\}$
(b) $\{p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}, p(0) = 1\}$
(c) $\{p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}, p(0) = p(1)\}$
(d) $\{p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$?

(a) $\mathbb{Q}^n$
(b) $\mathbb{R}^n$
(c) $\mathbb{C}^n$

Aufgabe 3. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ bezeichne $\bar{z} = x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl. Bildet die Menge der Funktionen

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \forall t \in \mathbb{R} : f(-t) = \overline{f(t)}\}$$

mit den üblichen Operationen $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ und $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$ einen Vektorraum über

(a) $\mathbb{R}$?
(b) $\mathbb{C}$?

Aufgabe 4. Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n und $\mathbb{Z}_2$ der Restklassenkörper modulo 2. Wir erklären die Skalarmultiplikation $\odot : \mathbb{Z}_2 \times G \to G$ durch $0 \odot g := n$, $1 \odot g := g$.

(a) Welche Bedingung muß die Gruppe G erfüllen, damit G mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ ist?
(b) Gib jeweils Beispiele von Gruppen, die diese Eigenschaft haben bzw. nicht haben.