

Aufgabe 5. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $d_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$. Bestimme die lineare Hülle $[(d_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 6. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\vec{a} = (1, 1, 0) \quad \vec{b} = (2, 1, 0) \quad \vec{c} = (0, 1, 3) \quad \vec{d} = (3, 5, 3)$$

gegeben. Stelle fest, ob $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ linear unabhängig ist und wenn nicht, drücke $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ aus.

Aufgabe 7. Es seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie die folgenden beiden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt.

- (1) Sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear unabhängig, so sind sie auch paarweise linear unabhängig.[†]
- (2) Sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ paarweise linear unabhängig, so sind sie linear unabhängig.

Aufgabe 8. Es sei $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Es seien weiters $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 9. Bestimme alle linear abhängigen Teilfamilien der Familie

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 10. Stelle fest für welche Werte von t die Familie

$$\left(\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \right)$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^3$ ist, wenn

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
- (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 11. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $a, b, c \in V$ drei linear unabhängige Vektoren. Untersuche, ob die Menge

$$\{a - b + c, a + b, b + c\}$$

linear unabhängig ist, und zwar für die Körper

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$
- (c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$

[†]Man sagt, die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sind *paarweise linear unabhängig*, wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ die Vektoren $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ linear unabhängig sind.