Aufgabe 1. Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 2. Seien $A_1, A_2, \dots, A_k$ quadratische $n \times n$ -Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeige, daß das Produkt $A_1 A_2 \dots A_k$ invertierbar ist genau dann, wenn alle A_i invertierbar sind.

Aufgabe 3. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Bestimme die LR -Zerlegung $A = PLR$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

und löse damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der rechten Seite $b = [3, 0, 4, -3]^t$.

Aufgabe 5. Sei V ein Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine *nilpotente* lineare Abbildung, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodaß $f^k = 0$.

(a) Zeige, daß $\text{id}_V - f$ invertierbar ist mit $(\text{id}_V - f)^{-1} = \text{id}_V + f + f^2 + \dots + f^{k-1}$

(b) Verwende (a), um die die Inverse der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zu bestimmen.