Aufgabe 6. Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutiert mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, d.h., $A \cdot B = B \cdot A$ für alle B, genau dann, wenn $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.
Hinweis: Betrachte die Elementarmatrizen E_{ij}.

Aufgabe 7. Ein *Kettenkomplex* C ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$0 = V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

mit der Eigenschaft, daß $\operatorname{im} f_{k+1} \subseteq \ker f_k$ für alle $0 \leq k \leq n-1$, d.h., $f_k \circ f_{k+1} = 0$. Der Quotientenraum $H_k(C) = \ker f_k / \operatorname{im} f_{k+1}$ heißt *k-te Homologie* des Komplexes. Zeige, daß für endlichdimensionale Kettenkomplexe (d.h., $\dim V_k < \infty$ für alle k) die Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim V_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim H_k(C).$$

Aufgabe 8. (a) Zeige, daß für eine invertierbare Matrix A und Spaltenvektoren u und v mit $\sigma = 1 + v^t A^{-1} u \neq 0$ gilt

$$(A + uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} u v^t A^{-1}.$$

(b) Bestimme damit die Inverse der Matrix $A + uv^t$ wobei

$$A + uv^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 9. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2 &\to \mathbb{R}_3 \\ \vec{x} &\mapsto A \cdot \vec{x} \end{aligned} \quad \text{, wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrixdarstellung $\Phi_C^B(f)$ bezüglich der Basen $B = \{(1,0)^T, (1,1)\}^T \subseteq \mathbb{R}_2$ und $C = \{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)\}^T \subseteq \mathbb{R}_3$

Aufgabe 10. Sei $\pi_n : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]_n$ die Abbildung, die alle Terme höheren als n-ten Grades abschneidet, d.h., $\pi_n(\sum_{i\geq 0} a_i x^i) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Sei weiters $q \in \mathbb{R}[x]_m$ ein fixes Polynom und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} M_q : \mathbb{R}[x]_n &\to \mathbb{R}[x]_n \\ p &\mapsto \pi_n(p \cdot q) \end{aligned}$$

(a) Zeige, daß M_q eine lineare Abbildung ist.
(b) Bestimme die Matrix von M_q bezüglich der Standardbasis $(1, x, \dots, x^n)$.
(c) Für welche q ist M_q injektiv? Welche Polynome q führen auf die gleiche Abbildung?

Aufgabe 11. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

und $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die durch $f(x) = Ax$ gegebene lineare Abbildung. Bestimme jeweils eine Basis B von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis C von $\mathbb{R}^3$, sodaß die Matrix von f die Gestalt

$$\Phi_C^B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$