Aufgabe 12. Bestimme die Matrix der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_A(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basen $B = (b_1, b_2, b_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $C = (c_1, c_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ wobei

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) direkt;
(b) unter Zuhilfenahme der vorher berechneten Basistransformationsmatrizen T_E^B und T_C^E.

Aufgabe 13. Eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ heißt *pseudoinvers* zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, wenn

$$ABA = A \text{ und } BAB = B.$$

(a) Sei $QAP = \tilde{A} = I_{mn}^{(r)} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ in Normalform. Wie lauten dann alle zu $\tilde{A}$ pseudoinversen Matrizen?
(b) Sei $\tilde{B}$ eine zu $\tilde{A}$ pseudoinverse Matrix. Zeige, daß dann $P\tilde{B}Q$ zu A pseudoinvers ist.

Aufgabe 14. Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Zerlege σ in ein Produkt von Transpositionen $\sigma = \tau_{k_1 l_1} \circ \tau_{k_2 l_2} \circ \cdots \circ \tau_{k_r l_r}$ mit $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$ und $l_i < k_i$.
(b) Bestimme die Fehlstände von σ sowie $\operatorname{sign}\sigma$.

Aufgabe 15. Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt *zyklisch*, wenn es ein $k \geq 1$ und eine Folge $i_1, i_2, \ldots, i_k$ gibt sodaß $\pi(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \leq j \leq k-1$, $\pi(i_k) = i_1$ und $\pi(i) = i$ für $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$; d.h.,

$$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to i_1.$$

und alle anderen i werden fixiert. Übliche Schreibweise: $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$.
(a) Zeige, daß zwei zyklische Permutationen $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ und $\rho = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ kommutieren ($\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$), wenn $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \emptyset$.
(b) Zeige durch Zerlegung in ein Produkt von Transpositionen, daß für eine zyklische Permutation gilt $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{k-1}$.
(c) Sei π ein Zyklus und σ eine beliebige Permutation. Zeige, daß auch $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$ ein Zyklus ist. Welche Elemente werden bewegt?

Aufgabe 16. Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
(a) Zeige, daß die Folge $i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots$ periodisch ist und daß die erste Zahl, die doppelt auftaucht, genau i ist.
(b) Die Folge $(i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots, \pi^{k-1}(i))$, wobei k der kleinste Exponent ist, sodaß $\pi^k(i) = i$ ist, heißt *Zyklus* von i. Zeige, daß die Relation

$$i \sim j :\iff j \text{ liegt im Zyklus von } i$$

eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiert.
(c) Zeige, daß jede Permutation als Produkt von kommutierenden Zyklen geschrieben werden kann.
(d) Führe diese Zerlegung für die Permutation σ aus Aufgabe 14 durch.