Aufgabe 17. Zeige, daß sich jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ als Hintereinanderausführung der Permutationen $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & \dots & n-1 & n \end{smallmatrix}\right)$ schreiben läßt.

Aufgabe 18. Sei $D : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $D(I_n) = 1$

(ii) $D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = \lambda D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für alle i.

(iii) $D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für alle $i \neq j$.

Hier steht $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ für $D(A)$, wobei $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Spalten der Matrix A sind. Zeige, daß $D(A) = \det A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Hinweis: Der schwierige Teil ist die Additivität. Zeige zunächst, daß $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ wenn die Spalten a_i linear abhängig sind.

Aufgabe 19. Bestimme die folgenden Determinanten

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (b)\quad \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$$

Aufgabe 20. Die Zahlen 18270, 16128, 63042, 17304, 17934 sind durch 42 teilbar. Zeige, daß auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

durch 42 teilbar ist, *ohne* die Determinante explizit auszurechnen.

Aufgabe 21. Zeige:

(i) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Einträgen $a_{ij} = \pm 1$, sodaß $\det A = 2! = 2$.

(ii) Es gibt keine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Einträgen $a_{ij} = \pm 1$, sodaß $\det A = 3! = 6$.

(iii) Es gibt für $n \geq 3$ keine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einträgen $a_{ij} = \pm 1$, sodaß $\det A = n!$.

Aufgabe 22. Sei

$$\operatorname{Tr}_n(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* einer $n \times n$-Matrix A. Zeige:

(a) $\operatorname{Tr}_n : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear und für $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $\operatorname{Tr}_n(AB) = \operatorname{Tr}_m(BA)$.

(b) Folgere daraus: Für $n \times n$-Matrizen A, B mit B invertierbar gilt $\operatorname{Tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{Tr}(A)$.

(c) Im Allgemeinen gilt für $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *nicht*, daß $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(ACB)$.

(d) Zeige, daß es keine Matrizen A und B gibt, sodaß $AB - BA = I$.

(e) Sei $F : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $F(AB) = F(BA)$ und $F(I) = n$. Dann ist $F = \operatorname{Tr}$.
Hinweis: Betrachte die Elementarmatrizen E_{ij}.