Aufgabe 23. Berechne den Eintrag $(A^{-1})_{4,3}$ der Inversen der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 24. Berechne die Determinanten

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & & \dots & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_2 & * & \dots & * \\ a_1 & * & \dots & & * \end{vmatrix}$$

Aufgabe 25. (a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zeige, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

(b) Folgerung: zu gegebenen paarweise verschiedenen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ und beliebigen $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ existiert genau ein Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit Grad n mit $p(x_i) = y_i$ für alle i.

(c) *Fleißaufgabe am Computer:* Berechne für verschiedene n jeweils den Graphen desjenigen Polynoms $p(x) \in \mathbb{R}_{2n}[x]$, für das $p(x_k) = |x_k|$, $k = -n, \dots, n$, wobei $x_k = \frac{k}{n}$.

Aufgabe 26. Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det(AB) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_m} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,i_1} & a_{m,i_2} & \dots & a_{m,i_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \dots & b_{i_1,m} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \dots & b_{i_2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_m,1} & b_{i_m,2} & \dots & b_{i_m,m} \end{vmatrix}$$

Aufgabe 27. Seien $P_i = (x_i, y_i)$ paarweise verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, daß die eindeutig bestimmte Gerade g, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft, durch folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

(b) Zeige, daß der eindeutig bestimmte Kreis k, der durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 verläuft, durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Was erhält man, wenn die Punkte auf einer Geraden liegen?

(c) Bestimme den Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $(-4, 1)$, $(-2, -3)$, $(4, 5)$.