Aufgabe 28. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeige, daß $\operatorname{rang}(A)$ identisch ist mit der größten Zahl $k \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$, für die eine nicht verschwindende Unterdeterminante der Ordnung k existiert, d.h., Indexmengen $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ und $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, sodaß

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 29. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B, C, D \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wobei A invertierbar ist. Zeige:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

Hinweis. Betrachte zunächst nacheinander folgende Fälle:

(i) $B = C = 0$, $D = I$; (ii) $B = C = 0$; (iii) $C = 0$, D singulär; (iv) $C = 0$.

Multipliziere jeweils mit geeigneten invertierbaren Blockmatrizen von links und/oder rechts und benutze die Multikplikativität der Determinante.

Aufgabe 30. Zeige für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

(a) $\langle a, b \times c\rangle = \langle b, c \times a\rangle = \langle c, a \times b\rangle = \Delta(a, b, c)$
(b) $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$
(c) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$
(d) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$

Aufgabe 31. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i c_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j d_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i d_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j c_j\right) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i)$$

(i) als Folgerung von Aufgabe 26; (ii) durch direkte Rechnung
und folgere daraus die Cauchy-Bunjakovskii-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{C}^n$.

Aufgabe 32. Welche der folgenden Formeln definieren positiv definite innere Produkte?

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2\overline{y_2}$
(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle x, y\rangle = 2x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$
(c) $V = \mathbb{C}^{n \times n}$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(B^* A)$, wobei $B^* = \overline{B^t}$.

Aufgabe 33. Sei $\langle\,,\,\rangle$ ein inneres Produkt auf einem Vektorraum V und $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ die entsprechende Norm.

(a) Zeige die *Parallelogrammgleichung*

$$(\dagger) \qquad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(b) Folgere daraus:

$$(\ddagger) \qquad \forall 0 < \varepsilon < 1 \exists \delta > 0 : \|x\| = \|y\| = 1 \wedge \left\|\frac{x + y}{2}\right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \epsilon$$

(nämlich $\epsilon = 2\sqrt{2\delta}$).

(c) Zeige durch explizite Gegenbeispiele, daß die Normen

$$\|x\|_1 = \sum |x_i| \qquad \|x\|_\infty = \max |x_i|$$

auf $\mathbb{R}^n$ keine der die Eigenschaften (†) und (‡) erfüllen und daher nicht durch ein inneres Produkt induziert sind.

(d) Skizziere die Ergebnisse graphisch im $\mathbb{R}^2$.