Aufgabe 34. Bestimme positive kleinstmögliche Konstanten c_{ij} (abhängig von der Dimension n), sodaß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\|_1 \leqslant c_{12}\,\|x\|_2 \qquad \|x\|_1 \leqslant c_{1\infty}\,\|x\|_\infty \qquad \|x\|_2 \leqslant c_{21}\,\|x\|_1$$
$$\|x\|_2 \leqslant c_{2\infty}\,\|x\|_\infty \qquad \|x\|_\infty \leqslant c_{\infty 1}\,\|x\|_1 \qquad \|x\|_\infty \leqslant c_{\infty 2}\,\|x\|_2$$

Aufgabe 35. Bestimme Index und Signatur der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

eine Matrix C, sodaß $C^*AC = D$ (Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{+1, -1, 0\}$ und eine Basis B des $\mathbb{R}^4$ sodaß $x^tAy = \Phi_B(x)^t D \Phi_B(y)$.

Aufgabe 36. Berechne die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 37. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & y \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix}$$

positiv definit?

Aufgabe 38. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix. Zeige:

(a) $A > 0 \implies A$ regulär und $A^{-1} > 0$.
(b) Sei $A \geqslant 0 \implies a_{ii} \geqslant 0$ für alle i und wenn für ein i der Diagonaleintrag $a_{ii} = 0$ ist, dann ist $a_{ij} = 0$ für alle j.
(c) Gilt das folgende verallgemeinerte Hauptminorenkriterium?
„*Eine $n \times n$-Matrix A ist positiv semidefinit genau dann, wenn* $\det A_r \geqslant 0$ *für alle* $r = 1, 2, \ldots, n$.“

Aufgabe 39. Seien $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungierte Matrizen und $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix. Zeige:

(a) Die Blockdiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

ist genau dann positiv (semi)definit, wenn sowohl A als auch C positiv (semi)definit ist.

(b) Die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} I_m & B \\ B^* & I_n \end{bmatrix}$$

ist genau dann positiv (semi)definit, wenn $I_n - B^*B$ positiv (semi)definit ist.