

Aufgabe 40. Zeige:

(a) Durch

$$A \leq B : \iff B - A \geq 0$$

(d.h., $B - A$ ist positiv semidefinit) wird eine Ordnungsrelation auf der Menge der selbstadjungierten Matrizen definiert.

(b) Wenn $B > 0$ und $A \geq B$, dann ist $A > 0$.

(c) Wenn $A \geq B$ und C beliebig, dann ist $C^*AC \geq C^*BC$.

(d) Finde Matrizen A und B , sodass $A \geq B \geq 0$ aber $A^2 \not\geq B^2$.

Aufgabe 41. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesche Matrizen. Zeige:

(a) $A \geq 0 \iff \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^{n \times 1}: A = \sum_{i=1}^n x_i x_i^*$.

(b) Sei C die Matrix mit den Einträgen $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Wenn $A \geq 0$ und $B \geq 0$, dann ist auch $C \geq 0$.

Aufgabe 42. Sei T die Drehung mit Matrixdarstellung

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme alle symmetrischen Bilinearformen $\langle x, y \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, daß $\langle x, Tx \rangle = 0$.

(b) Bestimme alle Sesquilinearformen $\langle x, y \rangle$ auf $\mathbb{C}^2$, sodaß für alle $x \in \mathbb{C}^2$ gilt, daß $\langle x, Tx \rangle = 0$.

Aufgabe 43. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit gegebener Basis $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Sei

$$R = \{v \in V : F(u, v) = 0 \forall u \in V\}$$

Zeige, daß $R = \{0\}$ genau dann, wenn die Matrix $A = (F(b_i, b_j))_{i,j=1,2,\dots,n}$ invertierbar ist.

Aufgabe 44. Bestimme alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ die als Bild des Vektors e_1 unter einer positiv definiten Matrix erhalten werden können.

Aufgabe 45. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U, W \subseteq V$ Unterräume. Zeige:

(a) $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$;

(b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$;

(c) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$ mit Gleichheit wenn $\dim V < \infty$.

(d) $V = U \dot{+} U^\perp \implies U = U^{\perp\perp}$;

(e) die folgende Konstruktion liefert ein Gegenbeispiel zur Umkehrung der Punkte (c) und (d): $V = C[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ und dem Unterraum $U = \{f \in C[-1, 1] \mid f(t) = 0 \forall t < 0\}$.