Aufgabe 46. Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(B^T A)$ das Skalarprodukt aus Aufgabe 32. Bestimme das orthogonale Komplement

$$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^T\}^\perp.$$

Aufgabe 47. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $U, W \subseteq V$ zwei Unterräume der gleichen Dimension $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Zeige: Wenn es $u \in U\backslash\{0\}$ gibt mit $u \perp W$, dann gibt es $w \in W\backslash\{0\}$ mit $w \perp U$.
Hinweis: Aufgabe 45.

Aufgabe 48. Sei

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 & = 0 \end{array} \right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}^5$ und $v = (1, -1, 1, -1, 1)^t$.

(a) Berechne die Orthogonalprojektion $\pi_U(v)$ mithilfe einer Gramschen Matrix.
(b) Berechne eine Orthonormalbasis von U.
(c) Berechne $\pi_U(v)$ mithilfe dieser Orthonormalbasis.
(d) Berechne die Matrixdarstellung von π_U bezüglich der kanonischen Basis.

Aufgabe 49. Gegeben seien die Daten $\vec{x} = (-2, -1, 1, 2)$ und $y = (1, 1, -1, 1)$. Bestimme mittels einer Orthogonalprojektion die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der quadratischen Polynomfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \end{aligned}$$

so, daß der Wert

$$\sum_{i=1}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Begründe, daß die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 50. Sei V eine Vektorraum mit Skalarprodukt und $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Zeige, daß

$$\operatorname{rank} \operatorname{Gram}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \dim \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\})$$

Aufgabe 51. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem von der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

induzierten Skalarprodukt. Orthonormalisiere die kanonische Basis mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren und bestimme die Koordinaten des Vektors $(7, 2, -5)$ bezüglich dieser ON-Basis.

Aufgabe 52. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und P_U die Orthogonalprojektion auf U. Zeige, daß $\operatorname{Tr} P_U = \dim U$.