

Aufgabe 53. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $V = U \dot{+} W$ eine Zerlegung als direkte Summe mit der entsprechenden Projektion $P_U : V \rightarrow U$. Zeige, daß $U \perp W$ genau dann, wenn für alle $v \in V$ gilt $\|P_U v\| \leq \|v\|$.

Aufgabe 54. Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $w(t) > 0$ für alle bis auf endlich viele t .

- (a) Zeige, daß durch $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t) dt$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$ definiert wird.
- (b) Sei $(p_n(x))_{n \geq 0}$ ein Orthogonalsystem von Polynomen in $\mathbb{R}[x]$ mit $\deg p_n = n$ und führendem Koeffizienten 1, d.h., $p_n(x) = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n-2}x^{n-2} + \dots + a_{n,0}$. Zeige, daß es Koeffizienten $\alpha_n \in \mathbb{R}, \beta_n \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodaß

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \beta_n p_{n-1}(x)$$

Aufgabe 55. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $w \in V$ ein Einheitsvektor. Wir definieren

$$S_w : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto v - 2\langle v, w \rangle w$$

- (a) Zeige, daß S_w eine lineare isometrische Abbildung ist.
- (b) Zeige, daß $S_w \circ S_w = \text{id}_V$ und S_w orthogonal ist.
- (c) Zeige, daß $\forall v \in \mathcal{L}\{w\}$ gilt $S_w(v) = -v$ und $\forall v \in w^\perp$ hingegen $S_w(v) = v$. Wie kann man S_w geometrisch interpretieren?

Aufgabe 56. (a) Zeige, daß jede orthogonale Matrix $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$ eine der Gestalten

$$U = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ oder } U = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

hat. Wie sind die Abbildungen geometrisch zu interpretieren?

- (b) Zeige, daß jede Matrix $U \in SU_2(\mathbb{C})$ (d.h., $U^*U = I$ und $\det U = 1$) die Gestalt

$$U = \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}$$

mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$ besitzt.

Aufgabe 57. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $f : V \rightarrow V$ eine Abbildung und $W \subseteq V$ invariant unter f (d.h., $f(W) \subseteq W$). Zeige, daß $W^\perp$ unter f^* invariant ist.

Aufgabe 58. (a) Bestimme die duale Basis von V^* zur Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^4$.

- (b) Bestimme die Matrix der eindeutigen (warum?) Projektionsabbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $\text{im } \varphi = \mathcal{L}\{(1, 1, -1, 2)^t, (1, -1, 2, 1)^t\}$ und $\ker \varphi = \mathcal{L}\{(2, 0, -2, -1)^t, (0, 1, -1, 1)^t\}$.

Aufgabe 59. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und V^* der Dualraum. Zeige:

$E \subseteq V$ ist ein Erzeugendensystem genau dann, wenn gilt:

$$\forall w^* \in V^* : [(\forall v \in E : \langle w^*, v \rangle = 0) \implies w^* = 0]$$