Aufgabe 60. Als *Quaternionen* bezeichnet man den 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{H} = \{a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} : a_i \in \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$ mit der formalen Basis $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ und den Multiplikationsregeln

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

Zeige:

(a) Die Quaternionen bilden eine assoziative Algebra.
(b) Jede Quaternion besitzt eine multiplikative Inverse (Hinweis: betrachte die “komplexe Konjugation” $\overline{a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}$).
(c) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit

$$a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \mapsto a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ist ein Algebrahomomorphismus.
(d) Der Betrag einer Quaternion ist $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$. Zeige, daß $|ab| = |a|\cdot|b|$ und daß $\{q \in \mathbb{H} \mid q\bar{q} = 1\}$ eine Gruppe ist, die isomorph zu $SU_2(\mathbb{C})$ ist. *Hinweis:* vgl. mit Aufgabe 56.

Aufgabe 61. Der *größte gemeinsame Teiler* zweier Polynome $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist jenes Polynom mit maximalem Grad und führendem Koeffizient 1, das beide Polynome teilt.

(a) Zeige, daß jeder gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ den ggT teilt und daß der $\operatorname{ggT}(f(x), g(x))$ in der Tat eindeutig festgelegt ist.
(b) Zeige, daß $\operatorname{ggT}(f(x), g(x)) = \operatorname{ggT}(g(x), f(x) - g(x)h(x))$ für jedes Polynom $h(x)$.
(c) Folgere daraus den *Euklidischen Algorithmus für Polynome*: Sei (f_k) die Folge von Polynomen, die durch die Vorschrift $f_0 = f$, $f_1 = g$, $f_i = f_{i+1}q_{i+1} + f_{i+2}$ (Divisionsalgorithmus) bestimmt ist. Dann endet das Verfahren mit $f_n = 0$ und $\operatorname{ggT}(f, g) = f_{n-1}$.

Aufgabe 62. Seien

$$p(x) = x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$$
$$q(x) = x^8 - x^5 - x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 2\,x - 2.$$

Bestimme $\operatorname{ggT}(p(x), q(x))$ mit dem euklidischen Algorithmus über $\mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 63. Die *Ableitung* eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ ist definiert (über einem beliebigen Körper!) als

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Zeige:

(a) Die Abbildung $p(x) \mapsto p'(x)$ ist linear und es gilt die Leibnizregel

$$(pq)'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x).$$

(b) Wenn $q(x)$ ein irreduzibler Faktor von $p(x)$ mit Vielfachheit $\geqslant 2$ ist (d.h., $p(x) = q(x)^k g(x)$ mit $k \geqslant 2$), dann ist $q(x)$ auch ein Teiler von $\operatorname{ggT}(p(x), p'(x))$.
(c) Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gilt auch die Umkehrung des vorigen Punktes. Was kann in endlichen Körpern schiefgehen?

Aufgabe 64. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und

$$\operatorname{Ann}(A) = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{K}[x] : p(A) = 0\}$$

die Menge aller Polynome mit führendem Koeffizienten 1, sodaß nach Einsetzen von A die Nullmatrix herauskommt. Zeige, daß $\operatorname{Ann}(A)$ nichtleer ist und daß es ein eindeutiges Polynom $m_A(x) \in \operatorname{Ann}(A)$ mit minimalem Grad gibt, das alle anderen Polynome in $\operatorname{Ann}(A)$ teilt.
Hinweis: Divisionsalgorithmus.