Aufgabe 65. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier Polynome $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist jenes Polynom mit minimalem Grad und führendem Koeffizient 1, das von beiden Polynomen geteilt wird. Zeige, daß jedes gemeinsame Vielfache von $f(x)$ und $g(x)$ vom kgV geteilt wird und daß das $\operatorname{kgV}(f(x), g(x))$ in der Tat eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 66. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 & 3 \\ -15 & -9 & 4 & -5 \\ 15 & 9 & -4 & 5 \\ 12 & 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie, wenn möglich, eine Matrix B, sodaß $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Aufgabe 67. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeige, daß die Eigenwerte von A^{-1} gegeben sind durch

$$\operatorname{spec} A^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \operatorname{spec} A\}$$

und daß die jeweils zugehörigen Eigenräume sind die gleichen.

Aufgabe 68. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutierende Matrizen ($AB = BA$) mit der Eigenschaft, dass $\ker A \cap \ker B = \{0\}$.

(a) Zeige (durch Induktion), dass $\ker(A^k) \cap \ker(B^l) = \{0\}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$.

(b) Folgere daraus, daß die Haupträume $\ker(\lambda - A)^n$ und $\ker(\mu - A)^n$ für verschiedene Eigenwerte $\lambda, \mu \in \operatorname{spec} A$ trivialen Durchschnitt haben.

Aufgabe 69. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(a) Zeige: es gibt Matrizen $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit den Eigenschaften

(i) idempotent $M_i^2 = M_i$ (ii) $M_i M_j = 0$ wenn $i \neq j$ (iii) $\operatorname{rank} M_i = 1$

sodaß

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i.$$

Zeige außerdem daß $A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k M_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Bestimme die Matrizen $M_1, M_2, \dots, M_n$ für die $n \times n$-Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 70. Sei

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

(a) Berechne $p(A)$ für ein beliebiges Polynom p.

Hinweis: Berechne zunächst A^2, A^3,… und beweise die erratene Formel durch Induktion.

(b) Leite daraus einen einfachen Beweis für die Leibnizregel (Aufgabe 63, (a)) her.

Aufgabe 71.

(a) Sei $f : V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung und $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum. Zeige, daß auch $f|_W : W \to W$ diagonalisierbar ist.

(b) Seien A, $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbare Matrizen. Zeige, daß $AB = BA$ genau dann gilt, wenn es eine Basis gibt, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und von B sind.

Hinweis: Zeige zunächst, daß die Eigenräume von A unter B invariant sind.