Aufgabe 76. Sei A eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Zeige:

(a) Die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

hat das gleiche charakteristische Polynom wie A.

(b) A ist ähnlich zu C genau dann, wenn ein Vektor v existiert, sodass die Vektoren

$$v, Av, A^2 v, \dots, A^{n-1} v$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 77. Seien $f, g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen. Zeige:

(a) Eine Zahl $\lambda \neq 0$ ist Eigenwert von $f \circ g$ genau dann, wenn sie Eigenwert von $g \circ f$ ist.

(b) Wenn $\dim V < \infty$ ist, dann gilt das auch für $\lambda = 0$.

Aufgabe 78. Berechne eine unitäre Matrix U, die die Matrix

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 1 & i \\ 1 & i & i & -1 \\ -1 & i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \end{bmatrix}$$

diagonalisiert.

Aufgabe 79. Berechne eine Schursche Normalform der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 80. Sei A eine selbstadjungierte Matrix. Zeige:

(a) A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

(b) Sei A eine positiv definite Matrix. Zeige, daß es eine positiv definite Matrix B gibt sodaß $B^2 = A$.

(c) Sei P eine Orthogonalprojektion. Bestimme eine positiv definite Matrix T sodaß $T^2 = I + P$.

Aufgabe 81.

(a) Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist normal genau dann, wenn es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leqslant n$ gibt, sodaß $A^* = p(A)$.
Wie klein kann der Grad von P gewählt werden?

(b) Folgere daraus, daß für eine beliebige Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:

$$AB = BA \implies A^* B = BA^*.$$