Zur Wiederholung ein Extrablatt mit Aufgaben aus Klausuren der vergangenen Jahre. Es ist nichts anzukreuzen!

Aufgabe 82. Wie groß muß x sein, damit die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}$$

positiv definit ist?

Aufgabe 83. Auf dem Raum $V = C([-2,2],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $[-2,2]$ nach $\mathbb{R}$ betrachten wir das innere Produkt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\,dx.$$

Sei $U \subseteq V$ der Unterraum aller Funktionen der Form $a+bx$, $a,b \in \mathbb{R}$. Zeige, daß für eine gegebene Funktion $f \in V$ die orthogonale Projektion auf U durch Funktion $u(x) = a+bx$ mit

$$a = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt \qquad b = \frac{3}{16}\int_{-2}^{2} tf(t)\,dt$$

gegeben ist.

Aufgabe 84. Sei A die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & \\ & & & 2 & 3 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimme für jeden Eigenwert λ jeweils Basen der Eigenräume und Haupträume sowie die Dimensionen $\dim\ker(\lambda I - A)^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
(b) Bestimme die Jordansche Normalform J und eine reguläre Matrix T, sodaß $T^{-1}AT = J$.
(c) Bestimme das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 85. Bestimme eine orthogonale Matrix U, sodaß $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 86. Sei A eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2\lambda(\lambda+1)^4$$

und Minimalpolynom

$$m_A(\lambda) = (\lambda-1)\lambda(\lambda+1)^2;$$

bestimme alle (bis auf Permutation) verschiedenen möglichen Jordanschen Normalformen.

Aufgabe 87. Sei A eine hermitesche Matrix. Zeige, daß die Eigenwerte von A genau dann im Intervall $[\alpha,\beta]$ liegen, wenn sowohl $A-\alpha I$ als auch $\beta I - A$ positiv semidefinit ist.