Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{K}^n$ und $\Delta : V^n \to \mathbb{K}$ eine Determinantenform und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine gegebene Matrix. Zeige:

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Delta_A : V^n &\to \mathbb{K} \\ (v_1, v_2, \dots, v_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, Av_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

ist eine Determinantenform.

(b) $\Delta_A(e_1, e_2, \dots, e_n) = \operatorname{Tr}(A)\,\Delta(e_1, e_2, \dots, e_n)$ wobei $\operatorname{Tr}(A) = \sum a_{ii}$.

Aufgabe 2. Bestimme die Matrixdarstellung der Abbildung

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}[x]_2 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p(x) &\mapsto x \cdot p(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basen (U_0, U_1, U_2) für $\mathbb{R}[x]_2$ und (U_0, U_1, U_2, U_3) für $\mathbb{R}[x]_3$, wobei

$$U_0(x) = 1 \qquad U_1(x) = x \qquad U_2(x) = x^2 - 1 \qquad U_3(x) = x^3 - 2x.$$

Aufgabe 3. Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. Berechne die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix}$$

Hinweis: Wenn die allgemeine Lösung nicht zu schaffen ist, gibt es 3 Punkte, wenn Sie den Fall $n = 4$ berechnen.

Aufgabe 4. Zeige, daß eine hermitesche Matrix A genau dann positiv definit ist, wenn $A^3 = A \cdot A \cdot A$ positiv definit ist.

Aufgabe 5. Für welche Werte von a ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ -a & -1 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

positiv definit?