Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2023/2024

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

4. Übungsblatt – 31. Oktober 2023

Beispiel 15 **(2 Punkte)**

Ein Transistor wird von drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 hergestellt. Die Maschine M_1 trägt zur Gesamtproduktion 30% bei, M_2 trägt 15% bei und die neueste Maschine M_3 trägt 55% bei. Der Ausschussanteil bei der Herstellung der Transistoren durch M_1 beträgt 1.5%, der durch M_2 beträgt 1% und der durch M_3 beträgt 0.7%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) ein zufällig ausgewählter Transistor defekt ist?

(b) unter hundert zufällig ausgewählten Transistoren maximal einer defekt ist?

(c) ein defekter Transistor von M_1 hergestellt wurde?

Beispiel 16 **(2 Punkte)**

Wir werfen drei faire, sechsseitige Würfel in den Farben blau, rot und grün. Dabei bezeichnen wir das Wurfergebnis des blauen Würfels mit B, des roten Würfels mit R und des grünen Würfels mit G. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die drei Würfel unterschiedliche Augenzahlen zeigen.

(b) $B > R > G$ unter der Voraussetzung, dass die Augenzahlen der drei Würfel unterschiedlich sind.

(c) $G > R > B$.

Beispiel 17 **(2 Punkte)**

Auf Facebook werden Bilder mit einer Software (Filter) auf verbotene Inhalte untersucht. Die Software erkennt zu 75%, dass ein nicht erlaubtes Bild verbotene Inhalte enthält und zu 10% werden bei einem zulässigen Bild fälschlicherweise verbotene Inhalte erkannt. Es wurde ermittelt, dass auf etwa 3% der hochgeladenen Bilder verbotene Inhalte zu sehen sind.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Software auf einem Bild verbotene Inhalte erkennt?

(b) Angenommen es werden verbotene Inhalte erkannt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bild wirklich nicht zulässig ist?

Beispiel 18 **(2 Punkte)**

Wir werfen einen fairen zwanzigseitigen Würfel und betrachten die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{\text{„die geworfene Zahl ist ungerade“}\},\\ B &= \{\text{„die geworfene Zahl ist durch drei teilbar“}\},\\ C &= \{\text{„die geworfene Zahl ist kleiner als 11“}\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse paarweise unabhängig sind, aber alle drei Ereignisse gemeinsam nicht unabhängig sind.

Beispiel 19 **(2 Punkte)**

Es seien A, B und C Ereignisse. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $\mathbb{P}(A) > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid A) \geq \mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B).$$

(b) Wenn $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ und $\mathbb{P}(B \cap C^{\mathsf{c}}) > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\,\mathbb{P}(C \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B \cap C^{\mathsf{c}})\,\mathbb{P}(C^{\mathsf{c}} \mid B).$$