

**Beispiel 20**

(2 Punkte)

Wir haben eine Urne A mit drei blauen und zwei weißen Kugeln, eine Urne B mit zwei blauen und einer weißen Kugel und einen fairen sechsseitigen Würfel. Mit diesen Voraussetzungen führen wir das folgende mehrstufige Experiment durch:

- i) Zuerst werfen wir den Würfel. Wenn das Wurfresultat eine ungerade Zahl ist, wählen wir für den nächsten Schritt Urne A, ansonsten Urne B.
  - ii) Wir ziehen aus der gewählten Urne zwei Kugeln mit Zurücklegen, wobei wir nicht auf die Reihenfolge der gezogenen Kugeln achten.
- (a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum für das Zufallsexperiment.
  - (b) Sei  $\Omega = \{BB, BW, WW\}$  die Ereignismenge des Experiments. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.
  - (c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechse gewürfelt wurde, wenn zwei weiße Kugeln gezogen wurden.

**Beispiel 21**

(2 Punkte)

- (a) Es seien  $A$  und  $B$  unabhängige Ereignisse.
  - (i) Zeigen Sie, dass  $A$  und  $B^c$  unabhängig sind.
  - (ii) Zeigen Sie, dass  $A^c$  und  $B^c$  unabhängig sind.
- (b) Ein Arbeitskreis zum Thema „Geschlechterdiskriminierung in den Naturwissenschaften“ enthält zehn Chemikerinnen, vier Chemiker, einige Physikerinnen und zwei Physiker. Wie viele Physikerinnen gehören dem Arbeitskreis an, wenn der Beruf und das Geschlecht eines zufällig gewählten Mitglieds des Arbeitskreises voneinander unabhängig sind?

**Beispiel 22**

(2 Punkte)

Wir haben eine Urne mit drei blauen und zwei roten Kugeln, eine faire Münze und einen fairen vierseitigen Würfel. Mit diesen Voraussetzungen führen wir das folgende mehrstufige Experiment durch:

- Zuerst ziehen wir eine Kugel aus der Urne.
- Wenn die Kugel blau ist, werfen wir den vierseitigen Würfel und notieren die geworfene Augenzahl.
- Wenn die Kugel rot ist, werfen wir dreimal die Münze und notieren die Anzahl an Würfeln, bei denen die Münze Kopf gezeigt hat.

Sei  $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  das Ergebnis des Experiments, wobei  $X = i$  bedeutet, dass entweder  $i$  die Augenzahl des geworfenen Würfels ist, oder  $i$  Münzwürfe Kopf ergeben haben.

- (a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum für das Zufallsexperiment.
- (b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine blaue Kugel gezogen wurde, wenn das Ereignis  $[X = 4]$  eingetreten ist.
- (c) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}(X = i)$  für alle  $i \in \{0, \dots, 4\}$ .
- (d) Berechnen Sie die Erwartung und die Varianz von  $X$ .

**Beispiel 23****(2 Punkte)**

Es seien Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  mit  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$  gegeben. Zeigen Sie,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}\left(A_{n+1} \mid \bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$