

Beispiel 24

(2 Punkte)

Wir werfen einen fairen vierseitigen Würfel zweimal und bezeichnen mit X das Produkt der beiden Würfe.

- Welche Werte kann X annehmen? Stellen Sie eine Tabelle auf, die jeden möglichen Wert von X und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit beinhaltet.
- Berechnen Sie die Erwartung und die Varianz von X .

Beispiel 25

(2 Punkte)

Wir betrachten die Produktion in einer Donutfabrik. Es ist bekannt, dass die Luftfeuchtigkeit einen Einfluss auf die Qualität des Germteigs hat. Aus empirischen Daten geht hervor, dass eine Luftfeuchtigkeit von über 70% zu schlechterer Qualität führt und eine Luftfeuchte unter 70% zu höherer Qualität führt. Wir nehmen an, dass die Chance für eine hohe Luftfeuchte an jedem Tag bei 40% liegt. Es gibt beim Endprodukt folgende 3 Qualitätsstufen:

- Q_1 : Höchste Qualität, kann zu 2 Euro pro Kilo verkauft werden.
- Q_2 : Mittlere Qualität, kann zu 1 Euro pro Kilo verkauft werden.
- Q_3 : Mindere Qualität, kann zu 0.3 Euro pro Kilo als Tierfutter verkauft werden.

Bei einer Luftfeuchtigkeit $\leq 70\%$ betragen die Wahrscheinlichkeiten für (Q_1, Q_2, Q_3) jeweils $(0.75, 0.15, 0.1)$. Bei Luftfeuchte $> 70\%$ verändern sich die Wahrscheinlichkeiten zu $(0.6, 0.2, 0.2)$.

- Stellen Sie die beschriebene Situation als Baumdiagramm dar.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Charge Qualität Q_3 hat? Wie hoch ist die Chance für Q_2 ?
- Bei einer Kontrolle stellte sich heraus, dass eine bestimmte Charge Qualität Q_3 hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an dem Tag eine hohe Luftfeuchte (über 70%) herrschte?
- In einer Woche werden an 5 Werktagen jeweils 100 Kilo produziert. Was ist der erwartete Umsatz von dieser Woche? Mit welcher Schwankung (=Standardabweichung) kann gerechnet werden?
- Die Produktionskosten belaufen sich auf 1.5 Euro pro Kilo. Für die nächsten 5 Tage ist vier mal schlechtes Wetter angesagt (d.h. es ist mit hoher Luftfeuchtigkeit zu rechnen) und einmal gutes Wetter. Zahlt sich die Produktion überhaupt aus oder soll die Fabrik still stehen? ¹

Beispiel 26

(2 Punkte)

Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{2\pi}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

gilt, indem Sie zuerst

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

beweisen.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$ gilt. Das Mehrfachintegral kann dann in Polarkoordinaten parametrisiert werden.

¹Wir nehmen an, dass an jedem Tag gleich viel produziert wird und dass die Fabrik entweder alle 5 Tage läuft oder gar nicht.

Beispiel 27**(2 Punkte)**

Bestimmen Sie den Wert von $c > 0$, sodass gilt

$$1 = c \int_0^1 \left(\sin(2\pi x) + e^{-x} - 1 \right)^2 dx.$$

Hinweis: Am besten quadrieren Sie den Integranden aus und berechnen die einzelnen Terme direkt bzw. mit partieller Integration/geeigneten Substitutionen.